UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I

SOBRE EL CÁLCULO DEL VALOR DE MYERSON, SU RELACIÓN CON EL VALOR POSICIONAL Y DIVERSAS EXTENSIONES.

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Enrique González Arangüena

Bajo la dirección del doctor

Conrado M. Manuel García

Madrid, 2010

ISBN: 978-84-693-7849-6

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa I

Sobre el cálculo del valor de Myerson, su relación con el valor posicional y diversas extensiones

Enrique Gonzalez Arangüena.

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, realizada bajo la dirección del Dr. D. Conrado M. Manuel García.

Madrid, Febrero de 2009.

Agradecimientos

Una tesis doctoral es en contadas ocasiones producto del trabajo de un sólo individuo, y esta no es, en ese sentido, una excepción. Son muchas las personas que de diferentes modos han contribuido a hacer realidad esta memoria, y a las que deseo manifestar aquí mi agradecimiento.

En primer lugar, quiero expresar mi especial gratitud al Profesor Conrado M. Manuel García por su dedicación en la dirección de este trabajo, y por su continuo apoyo y colaboración en el proceso de redacción de esta memoria.

Luego, y de forma destacada, al Profesor Guillermo Owen, que nos introdujo y guió durante años en el terreno de los juegos cooperativos. Y al Profesor Juan Tejada Cazorla, que me dirigió en mi primer trabajo de investigación, y con el que continuamos colaborando.

Y a los restantes coautores de los diferentes trabajos de los que se ha nutrido esta memoria, los Profesores Daniel Gómez, Mónica del Pozo y René van den Brink. Y al profesor Gustavo Bergantiños, que nos brindó generosamente su ayuda cuando se la solicitamos, y con el que esperamos seguir colaborando.

Me gustaría también expresar mi gratitud a mis compañeros y amigos del Departamento de Estadística e Investigación Operativa III en la Escuela Universitaria de Estadística de la UCM. Muy especialmente, además de a los ya citados, a Inés, a Maena, a Rosa, a Eduardo y a Javier. Por estar ahí.

Y a mi mujer, Cristina, a quien dedico esta memoria. Y, por último, a mi madre, sin cuya intervención, a buen seguro, esta memoria no habría visto la luz.

Procreare jocundum, sed parturire molestum.

Gauss.

"El estudio de los juegos, como se ha descrito anteriormente, ha ido significativamente más allá de ser *una teoría*. Mientras que está lejos de ser una ciencia completamente desarrollada, parece evolucionar en esta dirección."

Ehud Kalai (2004).

Índice general

1. Preliminares: Juegos y grafos **10**

1.1. Juegos en forma de función característica 10

1.1.1. Clases de juegos 13

1.1.2. Conceptos de solución: El Core y el valor de Shapley 18

1.2. Grafos 21

1.3. Juegos con restricciones en la formación de coaliciones 24

1.3.1. El modelo de Myerson. Situaciones de comunicación 27

1.3.2. Reglas de reparto para situaciones de comunicación: El valor de Myerson, el valor posicional y el de Hamiache 29

2. Sobre el cálculo del valor de Myerson y el valor posicional **36**

2.1. Introducción 36

2.2. Conjuntos de conexión de nodos y cálculo del valor de Myerson 39

2.2.1. Conjuntos de conexión 40

2.2.2. Cálculo del valor de Myerson 42

2.3. Una aproximación unificada al valor de Myerson y el valor posicional 46

2.3.1. Reglas de reparto para grafos y grafos de conexión 47

2.3.2. Cálculo del valor de Myerson y el valor posicional . . . 48
2.3.3. Algunas observaciones . . . 55
2.4. División de grafos y cálculo del valor de Myerson . . . 56
2.4.1. Preliminares: juegos de representación . . . 56
2.4.2. Dividiendo los grafos . . . 57

3. Juegos y grafos probabilísticos **64**
3.1. Introducción . . . 64
3.2. Juegos con grafos probabilísticos . . . 67
3.3. El modelo: Situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas . . . 69
3.4. Algunas propiedades del juego inducido . . . 74
3.4.1. Superaditividad . . . 74
3.4.2. Convexidad . . . 74
3.4.3. Juegos equilibrados y totalmente equilibrados . . . 77
3.4.4. Inclusión del valor de Shapley en el core . . . 79
3.5. Dos caracterizaciones del valor de Myerson probabilístico . . . 83
3.6. Observaciones finales . . . 93

4. Juegos generalizados y grafos dirigidos **95**
4.1. Introducción . . . 95
4.2. Preliminares . . . 98
4.2.1. Juegos y juegos generalizados . . . 98
4.2.2. Grafos y grafos dirigidos . . . 101
4.3. El modelo . . . 104

4.3.1. Coaliciones ordenadas conexas en digrafos 104

4.3.2. Situaciones de comunicación dirigidas 106

4.3.3. Reglas de reparto para situaciones de comunicación dirigidas. El valor de Myerson para digrafos 110

4.4. Dos caracterizaciones del valor de Myerson para digrafos 113

4.5. Observaciones finales 119

5. Futuras líneas de investigación **124**

Introducción

> ”Los recientes avances en biología, ciencia cognitiva y teoría social han hecho posible esbozar un marco conceptual sistémico que integra, por primera vez, las dimensiones biológica, cognitiva y social de la vida. Este nuevo marco ... se basa en el reconocimiento de que el patrón básico de la organización de la vida es la red. En todos los niveles de la vida ..., los componentes de los sistemas vivos están unidos entre sí a modo de red.
> Con las nuevas tecnologías de información y comunicación, las redes se han convertido en uno de los fenómenos más importantes de nuestros tiempos.”
>
> **Fritjof Capra**, en *Metabolism and Communications in Biological and Social Networks* (2003).

Es posible que el párrafo anterior le resulte a algún lector un tanto enfático. También es posible que fuera esa la impresión que pretendía causar el autor. En un tono quizá más aséptico, y menos centrado en la relación de las redes sociales con la biología, podemos leer en la wikipedia:

> ”El análisis de redes sociales (relacionado con la teoría de redes) ha emergido como una técnica clave en las modernas sociología, antropología, sociolingüística, geografía, psicología social, estudios de comunicación, ciencias de la información, economía y biología, así como ...”

Abrumador, ¿no? Sea como fuere, lo cierto es que, al menos en nuestro caso, en el principio fueron las redes.

Con ocasión de una estancia en Madrid del profesor Guillermo Owen que se prolongó durante un trimestre completo, se formó, en la primavera del año 2001, un grupo de trabajo integrado en un principio por Daniel Gómez, Conrado Manuel, Mónica del Pozo y Juan Tejada, además del profesor Owen y el autor de esta memoria, cuyo objetivo inicial fue el de analizar algunas de las posibles aplicaciones de la teoría de juegos al estudio de las redes sociales y económicas [1].

En su discurso presidencial con motivo del Segundo Congreso Mundial de la Game Theory Society, que tuvo lugar en Marsella en Julio de 2004, el profesor Kalai afirmó:

> "El estudio de los juegos se ha expandido significativamente ... De hecho, hemos progresado hasta una etapa en la que el trabajo en teoría de juegos requiere especialización.
> He dividido las investigaciones en curso en teoría de juegos en las trece especialidades principales siguientes:
> **1. La teoría de juegos no cooperativa** estudia ...
> **2. La teoría de juegos cooperativa** estudia cómo consideraciones de eficiencia, equidad, y estabilidad guían el reparto de beneficios y costes a las coaliciones de jugadores racionales.
> **3. ...** "
>
> **Ehud Kalai** (2004).

Precisamente en esta segunda especialidad de entre las mencionadas por el Prof. Kalai, la teoría de juegos cooperativa, se integran los trabajos en los que se comprometió a partir del año 2001 el grupo de investigación antes citado y que, con el tiempo, han dado lugar a

[1] Wasserman y Faust (1994) y Freeman (2006) son dos reconocidas referencias sobre los conceptos propios del análisis de redes sociales y las herramientas que se utilizan en el mismo.

muchos de los resultados que se presentan en esta memoria. Más en particular, se pueden inscribir en una corriente de la teoría de juegos cooperativa, que se plantea problemas relacionados con aquellos a los que se enfrentan los analistas de redes sociales, y que ha recibido una atención creciente en las últimas décadas: el estudio de los juegos cooperativos con restricciones en la formación de coaliciones, o con comunicaciones restringidas.

El modelo de Aumann y Dreze (1974) de los *juegos cooperativos con estructura de coalición* puede considerarse pionero en este terreno. En él, la cooperación puede darse únicamente dentro de cada una de las coaliciones que componen una cierta estructura o partición (dada a priori) del universo de jugadores. Pocos años más tarde, Myerson (1977) propuso un nuevo modelo, que llamó de los *juegos con grafos de cooperación*, en el que se añade al juego coalicional un grafo de comunicaciones, cuyos nodos se identifican con los jugadores, y cada una de cuyas aristas representa la posibilidad de una comunicación directa y simétrica entre los dos jugadores unidos por la misma. En este modelo, dos jugadores sólo podrán cooperar si pueden comunicarse (directa o indirectamente). Así, una coalición será factible si y sólo si es conexa en el grafo. Además de las características y propiedades del modelo de Myerson, se han estudiado desde entonces diversas variantes del mismo, en las que las restricciones en las comunicaciones, en lugar de estar representadas por un grafo estándar, pueden estarlo por un grafo probabilístico, o dirigido, o por un hipergrafo por ejemplo. O bien, modelos en los que, dado un grafo de comunicaciones, el valor que pueda obtener un grupo de jugadores no dependa sólo de sus componentes conexas en el grafo, sino también de la estructura interna de estas componentes [2].

En el ámbito de la teoría económica, se pueden encontrar además otros dos tipos principales de modelos que hagan uso conjunto de los conceptos de la teoría de juegos y el análisis de redes sociales: Por un lado, los modelos juego-teóricos de formación de redes, en cuyo estudio Aumann y Myerson (1988) fueron de nuevo pioneros [3], y en los que, utilizando herramientas de la teoría de juegos, se analiza cómo pueden formarse redes sociales reales

[2] Slikker y van den Nouweland (2001) hacen una detallada revisión de todos estos modelos.
[3] Tanto Robert J. Aumann, en el año 2005, como Roger B. Myerson, en el 2007, han sido galardonados recientemente con el premio Nobel de Economía por sus aportaciones a la Teoría de Juegos.

a partir de las interacciones de individuos que persiguen su propio interés [4]. Y, por el otro, los de juegos (no cooperativos) que se desarrollan en redes, y que, para una estructura de red dada, analizan los equilibrios en situaciones en las que los jugadores sólo interactúan con sus vecinos en la red [5]. En esencia, se trata por una parte de comprender cómo las redes afectan a los resultados económicos y, por otra, de analizar cómo surgen estas redes [6]. Estos dos tipos de modelos, aunque obviamente relacionados con los que aquí se presentan, no serán objeto de nuestro interés en esta memoria.

Volvamos entonces nuestra atención a los problemas que se ha planteado durante estos años el grupo de investigación antes mencionado, y a los que ha intentando dar respuesta utilizando modelos en la línea de los desarrollados por Myerson. En un principio, decidimos estudiar potenciales medidas juego-teóricas de la centralidad de los actores en una red social. La centralidad es un concepto que los sociólogos han definido con frecuencia sólo de modo indirecto. En cualquier caso, la centralidad de un actor en una red social está muy relacionada con su proximidad a los restantes actores en la red, así como con su capacidad de intermediación, posibilitando o facilitando las comunicaciones entre otros actores. Algunos años atrás, Grofman y Owen (1982) habían sugerido que esta centralidad podía medirse basándose en la noción de poder tal y como la entendía la teoría de juegos. En concreto, proponían utilizar una extensión natural del índice de poder de Banzhaf (1965), aunque afirmaban también que lo esencial de su propuesta se mantendría si, en lugar del de Banzhaf, se hubiera utilizado algún otro índice de poder.

En el modelo que comenzamos a desarrollar en la primavera del 2001, se identificaba una

[4] Los capítulos 1, por M. O. Jackson, y 2, por A. van den Nouweland, en Demange y Wooders (eds.) (2005) son sendas revisiones de la literatura sobre estos modelos de formación de redes, en los casos no cooperativo y cooperativo respectivamente.

[5] Como, por ejemplo, los modelos de evolución espacial de la cooperación, en los que los jugadores en una red se enfrentan con sus vecinos más próximos en un dilema del prisionero repetido, y que, en general, muestran cómo la cooperación puede sobrevivir en ciertas condiciones. Cf. Nowak y May (1992) para más detalles.

[6] En los últimos tiempos, y en el marco del interés creciente que la teoría económica muestra por los experimentos (económicos) de laboratorio, se han desarrollado también un cierto número de investigaciones sobre el papel de las redes en diferentes contextos experimentales relacionados con la teoría de juegos: redes de coordinación, o de cooperación, o redes de compra-venta, por ejemplo. También trabajos experimentales sobre formación de redes. Kosfeld (2004) hace una completa revisión de este tópico.

red social con lo que la Teoría de Juegos llama una situación de comunicación: el par formado por un juego n-personal en forma de función característica, que refleja los intereses que motivan las interacciones entre los individuos en la red, y un grafo de comunicaciones entre dichos individuos. En nuestro propósito, la introducción del juego en el modelo nos permitía enriquecerlo, y poder atender, haciendo variar el juego, a las diferentes concepciones de la centralidad que se encuentran en la literatura. A grandes rasgos, proponíamos identificar la centralidad no con el poder, sino con la variación del poder debida a la estructura social (representada por el grafo). Y, a diferencia de lo que se hacía en Grofman y Owen (1982), utilizábamos el valor de Shapley (1953) como medida del poder. El trabajo descrito dio lugar a la publicación:

- Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Tejada, J. (2003) Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences* **46**, 27-54.

Los resultados que se presentan en la Sección 2 del segundo capítulo de esta memoria (Conjuntos de conexión de nodos y cálculo del valor de Myerson) aparecen ya en este primer artículo, si bien es cierto que, allí, presentados como herramientas para facilitar el cálculo de las centralidades de los actores en una red social.

Aunque las motivaciones iniciales de los diferentes problemas que nos planteamos durante los años 2002 y 2003 se mantenían en el terreno de las aplicaciones al estudio de las redes sociales o económicas, se obtuvieron también en ese periodo resultados de carácter más general, o juego-teórico, si se prefiere, que se dieron a conocer en las publicaciones:

- Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Tejada, J. (2004a) Splitting graphs when calculating Myerson value for pure overhead games. *Mathematical Methods of Operations Research* **59**, 479-489.

- Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G. y del Pozo, M. (2004b) A unified approach to the Myerson value and the position value. *Theory and Decision* **56**, 63-76.

En el primero de ellos, nos propusimos averiguar cómo, en determinadas circunstancias, puede un grafo de comunicaciones romperse o dividirse en dos o más subgrafos, de modo que el valor de Myerson de cada jugador en la situación de comunicación original pueda calcularse con facilidad a partir de los valores de Myerson de dicho jugador en cada una de las situaciones de comunicación que resulten de la citada división. Los resultados correspondientes se recogen en la Sección 4 del Capítulo 2 de esta memoria.

El propósito inicial de los trabajos que condujeron a la publicación del segundo de estos artículos fue el de encontrar, para el cálculo del valor posicional, resultados en la línea de los anteriormente alcanzados para el cálculo del valor de Myerson. Logramos probar que, para calcular tanto el valor de Myerson como el valor posicional de una situación de comunicación, puede prescindirse del correspondiente juego inducido, utilizando en su lugar los conceptos de regla de reparto para grafos y de grafo de conexión de un conjunto de nodos. Los valores de una y otra regla de reparto difieren sólo en la regla de reparto para grafos asociada. Estos resultados se presentan en la Sección 3 del Capítulo 2 de esta memoria.

Durante el año 2004, el grupo, cuya composición fue sufriendo inevitablemente alguna modificación a lo largo del tiempo, con incorporaciones puntuales y alejamientos, que estamos seguros serán temporales, relacionados en general con las circunstancias vitales de sus diversos integrantes, centró su atención en el estudio de otra de las características de las redes sociales, que los sociólogos llaman cohesividad, y que definen como la tendencia de un grupo a mantenerse unido o, en un planteamiento alternativo pero simétrico, como su resistencia a fragmentarse. Buscábamos una medida basada en la teoría de juegos cooperativos para la cohesividad de los grupos o clases en una red social. Y, de nuevo, en el marco de las situaciones de comunicación. Con este propósito, dada una red social y el grafo (determinista) subyacente, consideramos un grafo aleatorio asociado, en el que las comunicaciones directas entre dos actores, representadas en el modelo clásico por aristas del grafo uniendo los nodos correspondientes, existen con probabilidad $1/2$, e independientemente unas de otras. En otros términos, asociamos a la red de comunicaciones determinista original una aleatoria, en la que se supone una distribución de probabilidad uniforme sobre el conjunto de los subgrafos del grafo (determinista) subyacente. En nuestra propuesta, se mide la cohesividad de un grupo en la red social como la proporción de su valor que el grupo conserva al pasar de la situación de comunicación determinista dada a la situación aleatoria asociada descrita. Estos trabajos aparecieron publicados como:

- Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Saboyá, M. (2008a) The cohesiveness of subgroups in social network: A view from game theory. *Annals of Operation Research* **158**, 33-46.

El estudio de los grafos aleatorios en relación con la medida propuesta para la cohesividad nos llevó a continuación a plantearnos la posibilidad de generalizar el modelo de Myerson, suponiendo que el grafo de comunicaciones, en lugar de determinista, fuera aleatorio. O, más formalmente, lo que llamamos en nuestro modelo un grafo probabilístico generalizado, que no es más que una distribución de probabilidad sobre la familia de todos los grafos (deterministas) posibles con un conjunto fijo de nodos. Los resultados que se obtuvieron, que incluyen una extensión del valor de Myerson para este tipo de situaciones de comunicación y un par de caracterizaciones de dicho valor, dieron lugar al trabajo que se publicó como:

- Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C. y Owen, G. (2008b) A value for probabilistic communication situations. *European Journal of Operational Research* **190**, 539-556,

y cuyo contenido se recoge en lo esencial en el Capítulo 3 de esta memoria.

A partir del otoño del año 2006, y de nuevo en la línea de considerar diferentes aplicaciones de la teoría de juegos al estudio de las redes sociales, nos planteamos la posibilidad de definir una medida de centralidad para redes sociales dirigidas, en las que las relaciones binarias entre actores pueden, por diferentes motivos, no ser simétricas, y se representan en el modelo por aristas orientadas o arcos en un grafo dirigido. Generalizaríamos así la medida propuesta anteriormente para redes sociales no dirigidas. Para ello, necesitábamos en primer lugar extender el modelo de Myerson, considerando la posibilidad de que las restricciones en las comunicaciones se representaran por medio de un grafo dirigido, en lugar de mediante un grafo no dirigido, como se hace en el modelo clásico. Pronto llegamos a la convicción de que, si pretendíamos extender el modelo de Myerson en la dirección citada, debíamos considerar también la eventualidad de que el juego que representa los intereses de los jugadores fuera no un juego TU clásico, sino un juego generalizado, del tipo de los introducidos por Nowak y Radzik (1994). También Sánchez y Bergantiños (1997, 1999, 2001) habían estudiado estos modelos, en los que el orden en el que los jugadores se incorporen a una coalición puede afectar al pago que esta reciba. Se invitó a participar en este trabajo al profesor van den Brink, que había dedicado anteriormente alguna atención a temas muy relacionados con el que nos ocupaba, y con el que mantenemos desde entonces una estrecha colaboración. Como en el caso de las situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas, se obtuvieron resultados que extienden el valor de Myerson a este nuevo tipo de situaciones de comunicación, y un par de caracterizaciones del valor definido. El estado actual de nuestras investigaciones en este tópico se recoge en la publicación interna:

- González-Arangüena, E., Manuel, C., Gómez, D. y van den Brink, R. (2008) A Value for Directed Communication Situations. *Tinbergen Institute Discussion Papers* 08-006/1, Tinbergen Institute, y *Cuadernos de trabajo Escuela Universitaria de Estadística UCM*, número 01/2008.

que se encuentra, a la fecha, en proceso de referee. El Capítulo 4 de esta memoria se basa, en lo esencial, en los contenidos de la citada publicación interna. Por otra parte, se encuentra en una fase avanzada de su elaboración otro trabajo, relacionado con el anterior, sobre medidas juego-teóricas de la centralidad en redes sociales dirigidas.

Se dijo al principio que el interés inicial del grupo fue el de analizar algunas de las posibles aplicaciones de la teoría de juegos cooperativos al estudio de las redes sociales. A pesar de ello, a lo largo de esta memoria nos centraremos en la exposición de los aspectos más propiamente juego-teóricos de los resultados obtenidos, y se harán referencias sólo circunstanciales a las aplicaciones más directas de dichos resultados al terreno del análisis de redes sociales. El motivo no es en absoluto el que estas aplicaciones se consideren de menor relevancia, sino el hecho de que otra de las integrantes del grupo de trabajo al que nos hemos venido refiriendo en esta introducción, la profesora del Pozo, incluirá dichos materiales entre los contenidos en su memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas que, en la actualidad, se encuentra redactando.

Para acabar con esta introducción, y como en una parte considerable se ha avanzado en los párrafos anteriores, lo que resta de esta memoria se organiza como sigue: Después de un primer capítulo dedicado a los preliminares, en el Capítulo 2 se agrupan aquellos resultados relacionados con el propósito de simplificar, bien sea conceptualmente o desde el punto de vista computacional, el cálculo del valor de Myerson y/o el valor posicional de una situación de comunicación clásica, mientras que en los Capítulos 3 y 4 se presentan sendas generalizaciones o extensiones del modelo de Myerson. En el 3, las que llamamos situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas, en las que las restricciones a las comunicaciones, que Myerson modeló mediante un grafo determinista, se reflejan mediante un par, que llamamos grafo probabilístico generalizado, formado por un conjunto de redes distintas y una distribución de probabilidad sobre este conjunto. Y, en el 4, las situaciones de comunicación dirigidas, en las que el juego TU clásico del modelo de Myerson se sustituye por un juego generalizado y el grafo no dirigido por uno dirigido. Por último, en el Capítulo 5 se exponen brevemente algunas de las preguntas que nos formulamos en relación con los resultados y modelos que aparecen en esta memoria, y que aún no hemos sabido o tenido tiempo de responder, y las líneas de investigación que nos proponemos explorar, de forma más o menos inmediata, con el fin de dar contestación, en la medida de nuestras fuerzas, a dichas preguntas.

Capítulo 1

Preliminares: Juegos y grafos

En este capítulo se presentan aquellos conceptos y herramientas matemáticas que se utilizan con frecuencia a lo largo del trabajo: los juegos n-personales cooperativos en forma de función característica, los grafos y las situaciones de comunicación, que surgen al considerar conjuntamente juegos y grafos.

Se ha procurado, con el fin de facilitar la lectura de esta memoria, incluir aquellos conceptos o resultados que aparecen sólo en un capítulo, o en una sección de un capítulo (como los grafos probabilísticos, los juegos generalizados o los grafos dirigidos, por ejemplo), en los preliminares o en la introducción del correspondiente capítulo o sección, según sea el caso.

1.1. Juegos en forma de función característica

La teoría de juegos cooperativos no construye un modelo de juego a partir de una descripción minuciosa del entorno estratégico. El orden de los movimientos de los jugadores, el conjunto de acciones disponibles para cada uno de ellos en cada uno de sus movimientos y/o las consecuencias en términos de pagos a los jugadores de cada uno de los posibles desarrollos del juego son elementos esenciales en los distintos tipos de modelos al uso en el análisis de juegos no cooperativos. Por su parte, la teoría de juegos cooperativos reduce la información en el modelo a la forma coalicional: los pagos que cada coalición puede asegurarse, representados por un número real. La principal ventaja de este tipo de modelos es su utilidad práctica, pues su estructura los hace en muchos sentidos más tratables que los modelos de juegos no cooperativos, ya sean en forma normal o extensiva.

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto finito de *jugadores*. Llamaremos *coalición* a cualquiera de los 2^n subconjuntos de N, y 2^N representará el conjunto de estas coaliciones. Un *juego coalicional* es un par (N, v), donde v, la *función característica*, es una función real definida en 2^N, que satisface $v(\emptyset) = 0$. Para cada coalición $S \in 2^N$, $v(S)$ representa la cantidad que los jugadores de S pueden obtener por ellos mismos si deciden cooperar, e independientemente de la actitud de los jugadores de la coalición complementaria $N \setminus S$. Implícitamente, se está suponiendo en el modelo que, si los jugadores de S forman una coalición, son capaces de alcanzar acuerdos vinculantes. Se supone también, en general, que la función característica se expresa en unidades de utilidad infinitamente divisibles, que pueden transferirse (sin costes de transacción) entre los jugadores. Los juegos coalicionales se conocen también como *juegos en forma de función característica* o, para abreviar, como *juegos TU* (por Transferencia de Utilidad) [1]. Cuando no haya ambigüedad con respecto a N, identificaremos el juego (N, v) con su función característica v.

Notaremos s el cardinal de la coalición $S \subset N$ y G^N la clase de los juegos coalicionales con conjunto de jugadores N. En este conjunto G^N se definen dos operaciones internas, suma y producto, y una multiplicación por escalares (números reales) del modo siguiente. Dados (N, v) y $(N, w) \in G^N$ y $\lambda \in I\!R$, se definen los juegos:

- $(N, v + w) \in G^N$, con $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para todo $S \subset N$.
- $(N, v \cdot w) \in G^N$, con $(v \cdot w)(S) = v(S) \cdot w(S)$ para todo $S \subset N$.
- $(N, \lambda v) \in G^N$, con $(\lambda v)(S) = \lambda\, v(S)$ para todo $S \subset N$.

El conjunto G^N, junto con las operaciones suma y producto por escalares, tiene estructura

[1] Si por algún motivo no fuera posible la transferencia de utilidad entre los jugadores de un juego n-personal cooperativo, la forma coalicional pierde la capacidad de representar adecuadamente la situación. En ese caso, se utilizan otras formas de representación, y se habla de juegos NTU.

de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, con dimensión $2^n - 1$. La *base de unanimidad* de este espacio G^N está formada por los *juegos de unanimidad* $\{u_S\}_{\emptyset \neq S \subset N}$, cuya función característica se define:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subset T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \text{ para todo } S \subset N \text{ con } S \neq \emptyset.$$

Dado un juego $v \in G^N$, $\{\Delta_v(S)\}_{\emptyset \neq S \subset N}$ es el conjunto de *los coeficientes de unanimidad* de v (las coordenadas de v en la base de unanimidad). Así, para todo $v \in G^N$, tenemos:

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) u_S.$$

Los coeficientes $\Delta_v(S)$ se pueden calcular a partir de la función característica v utilizando la relación:

$$\Delta_v(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T), \quad \text{para todo } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}. \tag{1.1}$$

Dados un juego $(N, v) \in G^N$, un jugador $i \in N$ y una coalición $S \subset N \setminus \{i\}$, llamaremos *contribución marginal* del jugador i a la coalición S en el juego v a la diferencia:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

En relación con la definición anterior, dados un juego $(N, v) \in G^N$ y dos jugadores $i, j \in N$, se dice que:

- i es un *jugador nulo*, si

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0 \quad \text{para todo } S \subset N \setminus \{i\},$$

es decir, si sus contribuciones marginales a cualquier coalición son nulas.

- i es un *jugador pasivo (o un pelele)*, si

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}) \quad \text{para todo } S \subset N \setminus \{i\}.$$

  Para aquellos jugadores para los que $v(\{i\}) = 0$, los conceptos de jugador nulo y jugador pasivo coinciden.

- i y j son *simétricos*, si

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \text{para todo } S \subset N \setminus \{i, j\},$$

  es decir, si, para toda coalición a la que no pertenezca ninguno de los dos jugadores, las contribuciones marginales de uno y otro son iguales. Dos jugadores simétricos desempeñan papeles en el juego que son, a todos los efectos, intercambiables.

1.1.1. Clases de juegos

Diferentes propiedades de la función característica nos permiten definir las diversas clases especiales de juegos TU que aparecerán en esta memoria. Un juego $(N, v) \in G^N$ diremos que es:

- *0-normalizado*, si:

$$v(\{i\}) = 0 \quad \textit{para todo} \;\; i \in N.$$

  En este trabajo utilizaremos en ocasiones G_0^N, el subespacio de G^N formado por los juegos 0-normalizados con conjunto de jugadores N. La familia $\{u_S\}_{S \subset N,\ s \geq 2}$ es una base del subespacio G_0^N.

- *(0, 1)-normalizado*, si:

$$v(\{i\}) = 0 \;\; \textit{para todo} \;\; i \in N, \quad y \;\; v(N) = 1.$$

- *Monótono*, si:

$$v(S) \leq v(T), \quad \textit{para todos} \quad S \textit{ y } T \subset N \quad \textit{tales que} \quad S \subset T,$$

es decir, si al incorporarse jugadores a una coalición, el valor de la misma no disminuye. La propiedad de monotonía intenta preservar la idea de que "mayor es mejor". Un juego es monótono si y solo si, para todo jugador $i \in N$, sus contribuciones marginales $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ a cada coalición $S \subset N \setminus \{i\}$ son no negativas.

- *Superaditivo*, si:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad \textit{para todos} \quad S \textit{ y } T \subset N \quad \textit{tales que} \quad S \cap T = \emptyset.$$

En los juegos superaditivos, la fusión de coaliciones disjuntas no puede empeorar las expectativas de cada una de ellas. La superaditividad, en general, no implica monotonía. Una condición suficiente para que se dé esta implicación es que el juego v sea, además, *no negativo*, es decir, que satisfaga $v(S) \geq 0$ para todo $S \subset N$.

- *Aditivo*, si:

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T), \quad \textit{para todos} \quad S \textit{ y } T \subset N \quad \textit{tales que} \quad S \cap T = \emptyset.$$

Un juego aditivo se dice también que es *no esencial* y satisface trivialmente que $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para todo $S \subset N$. Para estos juegos el incentivo a la cooperación desaparece y, por tanto, es irrelevante cuáles sean las coaliciones que realmente se formen, pues esto no supone ninguna diferencia en los pagos a los jugadores.

- *Esencial*, si:

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

Si v es un juego superaditivo, se cumplirá siempre que $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$, pero sólo en el caso de los juegos esenciales será de interés el análisis del comportamiento estratégico.

Si $v \in G^N$ es un juego esencial, se define la $(0,1)$-normalización de v como el juego $v^0 \in G^N$ con función característica:

$$v^0(S) = \frac{v(S) - \sum_{i\in S} v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i\in N} v(\{i\})}, \quad \textit{para todo } \; S \subset N.$$

Nótese que $v^0(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$, y $v^0(N) = 1$. Por tanto, $v^0 \in G_0^N$ para todo juego esencial $v \in G^N$. Dados dos juegos esenciales v y $w \in G^N$, se dice que son *estratégicamente equivalentes* si $v^0 = w^0$. Si dos juegos son estratégicamente equivalentes, las motivaciones estratégicas de los jugadores en uno y otro son las mismas. La equivalencia estratégica es, obviamente, una relación de equivalencia en la familia de los juegos esenciales. Cada clase de equivalencia contendrá un único juego (0, 1)-normalizado, su representante canónico.

- *De suma constante*, si:

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N), \quad \textit{para todo } \; S \subset N.$$

Si, además, es $v(N) = 0$, se dice que el juego es *de suma nula*. Todo juego aditivo es, obviamente, de suma constante. El recíproco, en general, no es cierto. Basta considerar el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y $v(S) = 1$ si $s \geq 2$ y 0 en otro caso. Es fácil ver que es de suma constante pero no aditivo.

- *Convexo*, si:

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \quad \textit{para todos } \; S \textit{ y } T \subset N.$$

La convexidad es una condición más fuerte que la superaditividad. Los juegos convexos fueron estudiados en primer lugar por Shapley (1971), y presentan algunas propiedades atractivas. Una definición alternativa es la siguiente: un juego (N, v) es convexo si para todo $i \in N$ y para cualesquiera coaliciones $S, T \subset N \setminus \{i\}$ con $S \subset T$, es:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Así, en un juego convexo, la contribución marginal $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ de un jugador i a una coalición $S \subset N \setminus \{i\}$ no decrece si a esta se incorporan nuevos miembros.

- *Casi-positivo*, si:

$$\Delta_v(S) \geq 0 \ \ \textit{para todo} \ \ S \subset N \ \ \textit{con} \ \ S \neq \emptyset,$$

  es decir, si todos sus coeficientes de unanimidad son no negativos. Todo juego casi-positivo es convexo. El recíproco, en general, no es cierto.

- *Simple*, si:

$$v(S) = 1 \ \ \text{ó} \ \ 0, \ \ \textit{para todo} \ \ S \subset N.$$

  Con frecuencia, se piensa en los juegos simples (Shapley (1962)) como juegos de votación, o modelos de las reglas de decisión de un determinado organismo político, como una cámara legislativa, por ejemplo. Las coaliciones S para las que $v(S) = 1$ se llaman coaliciones *ganadoras* y, obviamente, aquéllas para las que $v(S) = 0$ se dice que son coaliciones *perdedoras*. Un juego simple queda completamente determinado por su conjunto de coaliciones ganadoras. Un *juego de votación* es un juego simple, no trivial y monótono. Es decir, un juego con $v(N) = 1$ y en el que, dadas dos coaliciones S y $T \subset N$ con $S \subset T$, si S es ganadora, entonces T ha de serlo también.

- *Simétrico*, si:

  Existe una función $f : N \cup \{0\} \to I\!R$ tal que, para todo $S \subset N$, es $v(S) = f(s)$.

  En otros términos, un juego $v \in G^N$ es simétrico si cualesquiera dos jugadores i y $j \in N$ son simétricos en (N, v). En un juego simétrico, el valor de una coalición depende sólo del número de jugadores que la integren, y no de la identidad de los mismos.

Dados un juego (N, v) y una coalición $S \subset N$, la *restricción del juego v a la coalición S* es el juego que notaremos $v_{|S}$, con conjunto de jugadores S, y definido $v|_S(T) = v(T)$ para todo $T \subset S$. En ocasiones, nos referiremos también al conjunto de los juegos de la forma $(S, v|_S)$ con $S \subset N$ como los *subjuegos* de v.

En relación con uno de los conceptos de solución más relevantes en la teoría de los juegos cooperativos, el de core, que definiremos a continuación, es importante también la clase de los juegos *equilibrados*. Sea, para cada $S \subset N$, $\delta(N,S) = (\delta_i(N,S))_{i\in N}$ el *(vector) indicador* de (los elementos de) la coalición S en N, definido:

$$\delta_i(N,S) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S, \\ 0, & \text{si } i \in N \setminus S. \end{cases} \tag{1.2}$$

Diremos que una aplicación $B : 2^N \setminus \{\emptyset\} \to [0,1]$ es equilibrada si:

$$\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} B(S)\ \delta(N,S) = \delta(N,N).$$

Así, un juego $(N,v) \in G^N$ diremos que es:

- *Equilibrado*, si:

  Para toda aplicación equilibrada B,

  $$\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} B(S)v(S) \leq v(N).$$

  Para $n = 2$, por ejemplo, es inmediato comprobar que un juego es equilibrado si y sólo si es superaditivo. Pero también es fácil ver que este resultado no se mantiene para $n \geq 3$.

- *Totalmente equilibrado*, si:

  Es equilibrado y, para todo $S \subset N$, el subjuego $(S, v_{|S})$ es también equilibrado.

1.1.2. Conceptos de solución: El Core y el valor de Shapley

Un problema que se presenta de forma natural el estudiar los juegos coalicionales es el de determinar, supuesto que se forma la gran coalición, N, cómo deberían los jugadores repartirse, si actúan de un modo racional, la cantidad $v(N)$. En general puede hablarse de dos tipos de conceptos de solución: *de conjunto*, que intentan seleccionar, de entre todos los repartos posibles, un subconjunto (potencialmente vacío) que se considere congruente con un determinado criterio de racionalidad, y *de punto*, que seleccionan uno de entre todos los repartos posibles. Entre los primeros, nos detendremos en el *core* y, entre los segundos, en el *valor de Shapley*, que, además de ser seguramente los más relevantes en sus respectivas clases, son los únicos que se utilizan en esta memoria.

El Core

Dado un juego $(N, v) \in G^N$, diremos que un vector de pagos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n$ es una *imputación* si es *eficiente* e individualmente racional. Notaremos $E(N, v)$ el conjunto de todas las imputaciones del juego v. Formalmente:

$$E(N, v) = \left\{ \mathbf{x} \in I\!R^n / \;\; x_i \geq v(\{i\}) \;\; \text{para todo} \;\; i \in N, \;\; y \;\; \textstyle\sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

Desafortunadamente, la racionalidad individual y la eficiencia no siempre son compatibles. Una condición necesaria para que el conjunto de las imputaciones $E(N, v)$ sea no vacío es que el juego v satisfaga $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

La noción de Core como concepto de solución general de un juego TU fue desarrollada por Shapley (1952) y Gillies (1953, 1959). El core de un juego $(N, v) \in G^N$, que notaremos $C(N, v)$, se define como el conjunto de las imputaciones que son, además, colectivamente racionales para toda coalición. Una imputación está en el core si ninguna coalición puede forzar un cambio en el reparto que incremente su parte en el mismo. Formalmente:

$$C(N, v) = \left\{ \mathbf{x} \in I\!R^n \;\; / \; \textstyle\sum_{i \in N} x_i = v(N), \;\; y \; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \;\; \textit{para todo} \;\; S \subset N \right\}.$$

De todos los conceptos de solución en la teoría de juegos cooperativos, el core es, quizá, el más intuitivo. A pesar de ello, presenta propiedades que no en todos los casos se considerarán deseables. Entre ellas, el hecho de que no proporciona, en general, un único vector de pagos para cada juego (lo que, por otra parte, puede resultar enriquecedor en ocasiones) o, lo que es peor, que puede ser vacío. Bondareva (1963) y Shapley (1967) probaron, independientemente uno de otro, que el core de un juego (N, v) es no vacío si y sólo si (N, v) es un juego equilibrado.

El valor de Shapley

Cuando se publicó el artículo de Shapley (1953) titulado "A Value for n-Person Games", no existía aún ningún concepto de solución puntual que asignara un único vector de pagos a cada juego coalicional. Utilizando una aproximación axiomática, Shapley construyó una solución que, a lo largo del último medio siglo, ha sido, con diferencia, la que más atención ha recibido, de entre las de su clase, por parte de los investigadores en teoría de juegos.

Un operador Φ que asigna, a cada juego $(N, v) \in G^N$, un vector $\Phi(N, v) \in \mathbb{R}^n$ diremos que es un *valor*. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Phi_i(N, v)$ representa el pago al jugador i en el juego v (o, alternativamente, una medida del *poder* [2] de i en el juego).

Shapley presentó su valor como un operador que asignaba a cada jugador su contribución marginal esperada, tomando esta esperanza con respecto a una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de todas las permutaciones de N, el conjunto de los jugadores. Formalmente, dado un juego $(N, v) \in G^N$, se define el valor de Shapley del juego v, que notaremos $Sh(N, v)$, del modo siguiente:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!\ s!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right), \quad \text{para todo } i \in N. \tag{1.3}$$

[2] El concepto de "Índice de Poder" se introdujo inicialmente para los juegos simples. Shapley y Shubik (1954) propusieron utilizar el valor de Shapley para medir el poder de los miembros del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas.

Shapley justificó esta definición mediante una elegante caracterización axiomática, basada en cuatro axiomas o propiedades que debería satisfacer un valor Φ. A saber:

- *Eficiencia.* Para todo juego $(N, v) \in G^N$: $\sum_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N)$.
- *Simetría.* Si i y $j \in N$ son simétricos en (N, v), entonces: $\Phi_i(N, v) = \Phi_j(N, v)$.
- *Jugador pasivo.* Si $i \in N$ es un jugador pasivo, entonces: $\Phi_i(N, v) = v(\{i\})$.
- *Aditividad.* Dados dos juegos v y $w \in G^N$: $\Phi_i(N, v + w) = \Phi_i(N, v) + \Phi_i(N, w)$.

Shapley (1953) probó que existe un único valor que satisfaga las cuatro propiedades de eficiencia, simetría, del jugador pasivo y aditividad: el definido en la Ecuación (1.3) [3].

Caracterizaciones axiomáticas alternativas para el valor de Shapley se han dado posteriormente, por ejemplo, por Myerson (1980), Young (1985), Hart y Mas-Colell (1989), Chun (1989), Hamiache (2001), van den Brink (2001) o Kongo et al. (2007). Dubey (1975) lo caracterizó en la importante subclase de los juegos simples, y Neyman (1989) en la clase aditiva generada por un único juego.

El valor de Shapley es lineal y es fácil ver que, para todo $S \subset N$:

$$Sh(N, u_S) = \frac{\delta(N, S)}{|S|}, \tag{1.4}$$

es decir, para cada juego u_S de la base de unanimidad, el valor de Shapley reparte igualitariamente la unidad entre los jugadores de la coalición S. Y por tanto, para todo $v \in G^N$:

$$Sh(N, v) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) \, \frac{\delta(N, S)}{|S|}.$$

El valor de Shapley a menudo se ha interpretado y utilizado como una regla para repartir beneficios o costes colectivos. Esta interpretación asume implícitamente la existencia de

[3] En realidad, la formulación original de Shapley era algo diferente de la aquí expuesta, pues consideraba todos los juegos que podían jugar un número finito de jugadores de un cierto universo U, potencialmente infinito. En este contexto los axiomas de eficiencia y del jugador pasivo se fundían en una única propiedad.

algún tipo de autoridad central independiente que determina los pagos a los jugadores basándose en los axiomas que caracterizan el valor. Esta suposición no siempre es realista y, en ocasiones, los jugadores que se sientan insatisfechos con el reparto pondrán en duda la equidad de la regla, proponiendo la sustitución de uno o más de los axiomas que la sustentan. Diversos autores se han enfrentado al problema de encontrar un mecanismo descentralizado en el que los individuos se comporten estratégicamente en ausencia de una autoridad reguladora y que justifique el reparto propuesto por Shapley. Estos trabajos se pueden encuadrar en un ”programa” más general, preocupado por la construcción de juegos de regateo (no cooperativos) cuyos equilibrios coincidan con alguno de los diversos conceptos de solución para juegos cooperativos.

Harsanyi (1985) fue el primero en enfrentarse con el valor de Shapley desde este punto de vista. Winter (2002) hace una recensión detallada de la literatura al respecto y, en general, es una revisión notable sobre el valor de Shapley, que se centra en aspectos técnicos, como las diferentes axiomatizaciones. Un trabajo más reciente de Moretti y Patrone (2008) presenta una excelente colección de aplicaciones.

1.2. Grafos

Un grafo (finito), que por defecto es no dirigido, y que identificaremos frecuentemente en esta memoria con una red de comunicaciones, es un par (N, γ), en el que $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es un conjunto finito de *puntos*, *vértices* o *nodos* y γ un conjunto de *líneas* o *aristas*, es decir, pares no ordenados $\{i, j\}$ con $i, j \in N$ e $i \neq j$ [4]. Notaremos Γ^N la familia de todos

[4]Diferentes autores mantienen opiniones distintas sobre el uso de los términos *vértice*, *nodo* o *punto* y *arista* o *línea*. Tutte, por ejemplo, en su obra **Graph Theory**, afirma que ”La terminología de la Teoría de Grafos no está todavía estandarizada. Algunos autores prefieren...” (Tutte, (2001), p. 1), y manifiesta su preferencia por vértice y arista respectivamente. En los trabajos sobre redes sociales, sin embargo, y en general, se prefiere nodo (o actor) a vértice. En cualquier caso, y con el único fin de evitar ambigüedades, en este trabajo se utilizará en adelante nodo en lugar de vértice en todos los casos y, o bien arista, que notaremos como el conjunto (no ordenado) $l = \{i, j\}$, cuando se haga referencia a un grafo no dirigido, o bien *arco*, que notaremos como el par ordenado $a = (i, j)$, en el caso de los grafos dirigidos o digrafos.

los grafos con conjunto de nodos N. Cuando no haya ambigüedad con respecto a N, nos referiremos al grafo (N, γ) como γ. Si $\eta \subset \gamma$, diremos que (N, η) es un *subgrafo* de (N, γ).

Dados $i, j \in N$, si $\{i, j\} \in \gamma$ diremos que i y j están *directamente conectados* en γ. Si i y j no están directamente conectados en γ pero existe un *camino* que los conecta, es decir, si para un cierto $t > 2$ existe una sucesión $(i_1 = i, i_2, ..., i_t = j)$ tal que $\{i_k, i_{k+1}\} \in \gamma$ para todo $k \in \{1, ..., t-1\}$, diremos que están *indirectamente conectados.* Utilizaremos el término *conectados* en el grafo para referirnos indistintamente a una u otra de las situaciones anteriores. Un grafo (N, γ) es *conexo* si dos nodos cualesquiera de N, i y j, están conectados en γ. Consideraremos también conexo todo grafo con un único nodo. Un subconjunto $S \subset N$ es *conexo* en (N, γ) si el *grafo parcial* $(S, \gamma_{|_S})$ es conexo, siendo $\gamma_{|_S}$ el conjunto de las aristas $\{i, j\} \in \gamma$ en las que i y j son elementos de S. En consecuencia, dados un grafo (N, γ) e $i \in N$, consideraremos conexo en (N, γ) el subconjunto $\{i\}$. De las anteriores definiciones se sigue que, dados un grafo (N, γ) y un par de nodos $i, j \in N$, es posible que i y j estén conectados en γ pero el conjunto $S = \{i, j\}$ no sea conexo en (N, γ); para ello basta, obviamente, con que i y j estén indirectamente conectados en γ.

Dado un grafo (N, γ), la relación de equivalencia "estar conectado con" induce una partición de N en *componentes conexas.* Dos nodos i y j $(i \neq j)$ están en la misma componente conexa si y sólo si están conectados (directa o indirectamente). Llamamos aquí componente conexa a lo que también se conoce en la literatura como subconjunto conexo maximal [5]. Notaremos N/γ el conjunto de todas las componentes conexas de N en γ y, más en general, para cada $S \subset N$, S/γ será el conjunto de todas las componentes conexas en el grafo parcial $(S, \gamma_{|_S})$. Obviamente, el grafo (N, γ) es conexo si y sólo si $|N/\gamma| = 1$ y, más en general, cada subconjunto $S \subset N$ será conexo en (N, γ) si y sólo si $|S/\gamma| = 1$.

Dado $i \in N$, notaremos $C_i(N, \gamma) = \{i\} \cup \{j \in N \text{ tales que } j \ e \ i \text{ están conectados}\}$ el elemento de N/γ al que pertenece i. Si $C_i(N, \gamma) = \{i\}$, diremos que i es un *nodo aislado.*

[5] Algunos autores (ver, por ejemplo, Slikker y van den Nouweland (2001)) utilizan la expresión *internamente conexa* para referirse a las coaliciones que aquí hemos llamado conexas, y llaman conexa a cualquier coalición con la propiedad de que exista una componente conexa que la contenga, es decir, a cualquier coalición conectable en el grafo (N, γ). En el Capítulo 4, y para dar a los grafos un tratamiento paralelo al que allí se da a los grafos dirigidos, se volverá sobre este asunto.

Notaremos $L_i(\gamma) = \{ \{i,j\} \ / \ j \in N \text{ e } \{i,j\} \in \gamma \}$ el conjunto de aristas de γ incidentes en i. Eliminando aquellas aristas de γ que sean incidentes en i, obtendremos el subgrafo de γ que notaremos $\gamma_{-i} = \gamma \setminus L_i(\gamma)$.

Para cada nodo $i \in N$, notaremos $d_i(N,\gamma)$ el *grado* del nodo i en el grafo γ, que se define:

$$d_i(N,\gamma) = |L_i(\gamma)|,$$

es decir, el número de aristas de γ incidentes en i.

Entre los elementos de Γ^N, podemos distinguir el *grafo vacío*, $\emptyset$, sin ninguna arista, y el *grafo completo*, K_N, aquel en el que todos los pares de nodos están directamente conectados. Nótese que un grafo con conjunto de nodos N es, a la vez, un elemento de Γ^N y un subconjunto (o subgrafo) de K_N.

Un *ciclo* en un grafo (N,γ) es un camino cerrado que no utiliza a ningún nodo más de una vez. Formalmente, es una sucesión ordenada de nodos $(i_1, i_2, \ldots, i_t, i_{t+1})$, con $t \geq 3$ y tal que: $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subset N$, $\{i_k, i_{k+1}\} \in \gamma$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$, e $i_{t+1} = i_1$. Diremos que (N,γ) es un grafo *libre de ciclos* si para cualesquiera dos nodos i y $j \in N$ con $i \neq j$ y tales que i y j están conectados, existe un único camino en γ que los conecta. Un grafo libre de ciclos y conexo diremos que es un *árbol*. Un grafo (N,γ) es *ciclo-completo* si, para cada ciclo $(i_1, i_2, \ldots, i_t, i_{t+1})$ en el grafo, el grafo completo de los nodos que intervienen en el ciclo, $K_{\{i_1, i_2, \ldots, i_t\}}$, es un subgrafo de (N,γ). Como, obviamente, los grafos libres de ciclos no contienen ciclos, son trivialmente ciclo-completos, como lo son también los grafos completos (N, K_N) pues, para cualquier coalición $S \subset N$, se satisface $K_S \subset K_N$.

Dados un grafo (N,γ) y una coalición $S \subset N$, definiremos la *envoltura conexa* de S en (N,γ), que notaremos $H(N,\gamma,S)$, del modo siguiente:

$$H(N,\gamma,S) = \bigcap \{T \subset N \text{ tales que } S \subset T \text{ y T conexo en } (N,\gamma)\}, \tag{1.5}$$

si S es conectable en (N,γ), y $H(N,\gamma,S) = \emptyset$ si no lo es, es decir, si no existe ningún conexo $T \subset N$ tal que $S \subset T$. Es conveniente hacer notar que esta envoltura conexa $H(N, \gamma, S)$, a pesar del nombre, no será, en general, un conjunto conexo en el grafo para un grafo (N, γ) cualquiera, pero sí si este es ciclo-completo.

1.3. Juegos con restricciones en la formación de coaliciones

En el estudio de los juegos TU se han dado muy diferentes aproximaciones. Inicialmente, al pensar en la formación de coaliciones, se supuso que el juego era superaditivo, en el sentido de que cualesquiera dos coaliciones disjuntas, actuando unidas, podrían obtener al menos tanto como actuando por separado. En esta situación, era razonable esperar que se formase la *gran coalición* N.

Pero, a pesar de ello, muchas situaciones no son superaditivas. Aumann y Dreze (1974), sugieren diversas razones para la existencia de entornos sociales que den lugar a juegos que no sean superaditivos. Puntualizan que, en algunos casos:

"*actuar juntos puede ser difícil, costoso o ilegal, o los jugadores pueden, por diferentes razones personales, no desear hacerlo.*" (Aumann y Dreze, 1974, p. 233).

Demange (1994) describe dos fuerzas opuestas que actúan en la formación de subgrupos. En primer lugar, el poder de las coaliciones que, en general, crece con su tamaño, y que estimula la cooperación; en segundo, la heterogeneidad de los jugadores, que conduce a la formación de *subcoaliciones*. Por ejemplo, los individuos forman comunidades con el objetivo de compartir costes de producción (o de distribución) de todo tipo de bienes públicos, los partidos políticos forman coaliciones con el fin de obtener más votos, etc. Pero, por otro lado, si un bien público es utilizado por muchos consumidores, puede estar lejos de algunos de ellos, o puede ocurrir que el acceso al mismo esté sujeto a frecuentes congestiones; o, en política, formar una gran coalición a menudo significa en último extremo no satisfacer a ningún votante. Como resultado, aquellos que están próximos, sea en su ubicación geográfica, sea en sus preferencias políticas, forman subcoaliciones. En consecuencia, dado un juego n-personal cooperativo, se necesita contestar a dos preguntas fundamentales:

(i) ¿Qué coaliciones debemos esperar que se formen?, y (ii) ¿Cómo deben los jugadores de cada una de las coaliciones que realmente se formen repartirse el beneficio conjunto?

Estos dos aspectos de un juego coalicional están estrechamente relacionados. Por una parte, el reparto de los pagos a los jugadores dependerá de las coaliciones que realmente se hayan formado pero, por otra, el conjunto de coaliciones que finalmente se forme dependerá de los pagos que cada jugador considere que puede obtener de cada una de las posibles coaliciones. Por tanto, los pagos influyen en la estructura de coaliciones y viceversa.

A pesar de ello, la mayor parte de la investigación en este terreno se ha centrado en la determinación de los pagos razonables a los jugadores suponiendo la estructura de coaliciones dada exógenamente, y esta suposición se va a mantener en algún sentido a lo largo de todo este trabajo, aunque consideremos diferentes modos de imponer dicha estructura.

El primer modelo en el que, al estudiar un juego TU, se contempla la existencia de restricciones a la formación de coaliciones es el de los *juegos cooperativos con estructuras de coalición*, de Aumann y Dreze (1974). En esta aproximación a la posibilidad de una cooperación restringida o limitada, los autores suponen dada una partición de N, el conjunto de los jugadores, de la forma $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r\}$, que llaman estructura de coalición. Las estructuras de coalición se habían utilizado previamente en la definición de diferentes conceptos de solución para juegos cooperativos (ver, por ejemplo, Aumann y Maschler (1964), cuando definen los distintos conjuntos de regateo). Dada una de estas estructuras de coalición, los jugadores pueden cooperar únicamente dentro de cada una de las coaliciones $\mathcal{B}_k$ que la componen, y no podrá darse ninguna comunicación entre jugadores que pertenezcan a diferentes componentes (elementos o coaliciones) de la citada estructura. En el trabajo se establecen resultados que conectan los diferentes conceptos de solución (como el core, por ejemplo) definidos para una estructura de coalición $\mathcal{B}$ con los mismos conceptos de solución aplicados a juegos definidos adecuadamente en cada una de las coaliciones $\mathcal{B}_k$ de la familia $\mathcal{B}$.

En el modelo de Aumann y Dreze los jugadores de una componente de la partición no pueden compartir beneficios con ningún jugador fuera de esa componente, lo que justifica imponer a cualquier regla de reparto la condición de que satisfaga algún tipo de eficiencia en componentes. Pero en el mundo real, la formación de coaliciones a menudo obedece a razones meramente estratégicas, sin imposibilitar posteriores acuerdos y repartos entre los integrantes de las diversas coaliciones. En esta línea, los modelos de Owen (1977) y de Hart y Kurz (1983) difieren del de Aumann y Dreze en que no asumen la restricción de factibilidad de éste, en el sentido de que los jugadores de cada coalición $\mathcal{B}_k \in \mathcal{B}$ deban repartirse precisamente la cantidad $v(\mathcal{B}_k)$. Una revisión de estos y otros trabajos en esta línea puede encontrarse en Greenberg (1994).

Myerson (1977) adopta un punto de vista distinto, al suponer que los jugadores cooperarán en un juego alcanzando una serie de acuerdos bilaterales entre ellos. Cada uno de estos acuerdos bilaterales cooperativos puede representarse por un enlace entre los dos jugadores que alcanzan el acuerdo, de modo que cualquier estructura de cooperación pueda representarse a su vez mediante un conjunto de tales enlaces, conjunto que el autor identifica con un grafo cuyas aristas serían los enlaces individuales. De este modo, afirma, se pueden identificar todas las posibles *estructuras de cooperación* con el conjunto de todos los grafos definidos en el conjunto de jugadores N. La existencia del grafo implica por tanto que no todas las coaliciones son posibles. En su modelo, Myerson considera *factibles* sólo aquellas coaliciones que sean conexas en el grafo. Dado un grafo de cooperación γ, la estructura de coaliciones asociada naturalmente al grafo γ será entonces la partición de N en componentes conexas, N/γ. Estas componentes (conexas) hacen el papel de los elementos de la partición en el modelo de Aumann y Dreze. Nótese, sin embargo, que dos grafos de cooperación distintos, γ_1 y γ_2, pueden dar lugar a la misma estructura de cooperación, por ser $N/\gamma_1 = N/\gamma_2$. El modelo de Aumann y Dreze puede por tanto considerarse un caso particular del de Myerson, el que se obtendría considerando el grafo en el que, para cada una de las coaliciones $\mathcal{B}_k$ de la estructura $\mathcal{B}$, existiera una arista entre dos jugadores cualesquiera de dicha coalición (y ninguna arista uniendo a jugadores pertenecientes a coaliciones distintas); es decir, el grafo que resultaría de la unión de los subgrafos completos para cada una de las coaliciones $\mathcal{B}_k$. En este sentido, el modelo de Myerson es más rico que el de Aumann y Dreze, pues permite considerar situaciones en las que el grafo restringido a cada una de las componentes no sea completo.

En el siguiente apartado uniremos los dos conceptos introducidos en las secciones anteriores, juegos coalicionales y redes o grafos, y estudiaremos con un cierto detalle el modelo que Myerson llamó de los *juegos con grafos de cooperación* y para el que, con el tiempo, se ha impuesto la denominación de *situaciones de comunicación* (ver, por ejemplo, Slikker y van den Nouweland (2001), que hacen una detallada revisión de estos modelos).

1.3.1. El modelo de Myerson. Situaciones de comunicación

Una situación de comunicación es una terna (N, v, γ), en la que (N, v) es un juego de G^N y (N, γ) un grafo de Γ^N. No se supone ninguna relación particular entre el juego v y el grafo γ, más allá del hecho de que los nodos del grafo sean los jugadores en el juego. Notaremos $\mathcal{CS}^N$ el conjunto de todas las situaciones de comunicación con conjunto de nodos N, y $\mathcal{CS}_0^N$ la subclase de la anterior en la que el juego subyacente, v, es un juego 0-normalizado.

Dada una situación de comunicación (N, v, γ), Myerson (1977) introdujo el juego restringido (al grafo) v^γ, un juego TU cuyos jugadores son los del juego v y que representa las posibilidades económicas de los jugadores teniendo en cuenta las comunicaciones disponibles. Su función característica v^γ se define:

$$v^\gamma(S) = \sum_{C \in S/\gamma} v(C), \qquad \text{para todo } S \in 2^N. \tag{1.6}$$

Esta definición admite la siguiente interpretación intuitiva: Si una coalición S dada es conexa en el grafo (N, γ), es decir, si cada jugador de S puede comunicarse (directa o indirectamente) con cada uno de los restantes sin necesitar la ayuda (como intermediario) de alguno o algunos de los jugadores que no están en S, entonces los jugadores de S pueden coordinarse para obtener la cantidad $v(S)$. Pero si no es conexa, no todos los jugadores de S podrán coordinarse con cada uno de los restantes. En este caso, la coalición se dividirá en sus componentes, de acuerdo con la partición S/γ. Los jugadores de S deberán entonces limitarse a coordinar sus acciones dentro de cada una de estas componentes, y la cantidad que podrán obtener será precisamente la que Myerson propuso como definición de $v^\gamma(S)$, la suma de los v-valores de estas componentes. Nótese que, si la red de comunicaciones es el grafo completo (N, K_N), entonces todas las coaliciones son conexas en el grafo y el juego restringido al grafo v^{K_N} coincide con el juego original v, lo que resulta natural teniendo en cuenta que, en este caso, se está suponiendo en el modelo que no existen restricciones a la formación de coaliciones.

La relación entre los coeficientes de unanimidad del juego subyacente v y del juego restringido al grafo v^γ ilustra el modo en que las restricciones a la comunicación impuestas por el grafo afectan a cada una de las coaliciones en particular. Owen (1986) obtuvo el primer resultado en esta línea, válido para situaciones de comunicación con grafos libres de ciclos, que van den Nouweland (1993) extendió a un caso ligeramente más general al probar que, para toda situación de comunicación (N, v, γ) en la que (N, γ) es un grafo ciclo-completo, resulta:

$$\Delta_{v^\gamma}(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N;\ H(N,\gamma,T)=S} \Delta_v(T), \quad \text{para todo } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}, \tag{1.7}$$

donde $H(N, \gamma, T)$ es la envoltura conexa de la coalición T en el grafo (N, γ), definida en (1.5).

También ha recibido cierta atención en la literatura el problema que podríamos llamar de la "herencia" de propiedades en situaciones de comunicación. Consiste en determinar, dada una propiedad particular del juego subyacente en la situación de comunicación, v, qué condiciones del grafo γ son necesarias y/o suficientes para garantizar que dicha propiedad sea satisfecha también por el juego restringido v^γ. Nos limitaremos aquí a enumerar los resultados más relevantes en este terreno con relación a algunas de estas propiedades.

- **Superaditividad**. Owen (1986) probó que, dados un grafo (N, γ) arbitrario y un juego (N, v) superaditivo, el juego restringido (N, v^γ) es superaditivo también.

- **Convexidad**. Van den Nouweland y Borm (1991) probaron que: (i) Si (N, v) es un juego convexo y el grafo (N, γ) es ciclo-completo, entonces el juego restringido al grafo (N, v^γ) es convexo también y, (ii) Si el grafo (N, γ) no es ciclo-completo, entonces existe un juego (N, v) tal que el juego restringido al grafo (N, v^γ) no es convexo (por tanto, y en este sentido, la condición de ciclo-completitud del grafo es una condición no sólo suficiente, sino también necesaria para poder garantizar la herencia de la convexidad).

- **Juegos equilibrados y totalmente equilibrados**. Slikker y van den Nouweland (2001, th. 3.2, p. 56) prueban que si γ es, o bien el grafo vacío o bien un grafo no vacío y conexo en Γ^N, entonces, para todo juego equilibrado (N, v), el juego (N, v^γ) es también equilibrado. Anteriormente, van den Nouweland (1993) probó que, para cada $\gamma \in \Gamma^N$ y para todo juego (N, v) totalmente equilibrado, el juego (N, v^γ) es también totalmente equilibrado.

- **Inclusión del valor de Shapley en el core**. Slikker (2000) probó que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:
  (i) Para todo juego $(N, v) \in G^N$ con $Sh(N, v) \in C(N, v)$ es $Sh(N, v^\gamma) \in C(N, v^\gamma)$, y
  (ii) (N, γ) es el grafo vacío o el grafo completo.

1.3.2. Reglas de reparto para situaciones de comunicación: El valor de Myerson, el valor posicional y el de Hamiache

Sea $\mathcal{CS}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{CS}^N$ el conjunto de todas las situaciones de comunicación. Una *regla de reparto* definida en una clase $\mathcal{CS} \subset \mathcal{CS}^\infty$ de situaciones de comunicación es simplemente una función Ψ que asigna un vector de pagos $(\Psi_i(N, v, \gamma))_{\,i=1,\ldots,n} \in I\!R^n$ a cada situación de comunicación (N, v, γ) en la clase $\mathcal{CS}$.

El valor de Myerson

Myerson (1977) introdujo una regla de reparto para estas situaciones de comunicación, a la que posteriormente se ha dado el nombre de *valor de Myerson*. El valor de Myerson de una situación de comunicación (N, v, γ), que notaremos $\mu(N, v, \gamma)$, se define como el valor de Shapley del juego restringido al grafo (N, v^γ), es decir:

$$\mu(N, v, \gamma) = Sh(N, v^\gamma). \tag{1.8}$$

El valor de Myerson es no sólo la primera, sino también la predominante entre todas las reglas de reparto para situaciones de comunicación que aparecen en la literatura. Satisface una serie de propiedades, que además permiten caracterizarlo axiomáticamente, y que pasamos a definir.

Una regla de reparto Ψ definida en una clase $\mathcal{CS}$ de situaciones de comunicación diremos que satisface la propiedad de:

- *Descomponibilidad en componentes*, si:

  Para toda situación de comunicación (N, v, γ) en la clase $\mathcal{CS}$ y para todo jugador $i \in N$, la situación de comunicación $(C_i, v_{|C_i}, \gamma_{|C_i})$ está también en $\mathcal{CS}$ y

  $$\Psi_i(N, v, \gamma) = \Psi_i(C_i, v_{|C_i}, \gamma_{|C_i}),$$

  donde, para hacer menos farragosa la notación, se está utilizando C_i para notar la componente a la que pertenece el jugador i en el grafo (N, γ) que, en la sección dedicada a los grafos, notábamos $C_i(N, \gamma)$. Una regla de reparto es descomponible en componentes si la cantidad que asigna a cada jugador depende sólo de lo que ocurra en la componente a la que éste pertenezca, en el sentido de que dicha cantidad no se verá modificada por cambios en el juego o en el grafo que afecten sólo a jugadores pertenecientes a otras componentes.

- *Eficiencia en componentes*, si:

  Para toda situación de comunicación (N, v, γ) en la clase $\mathcal{CS}$ y para toda componente $C \in N/\gamma$,

  $$\sum_{i \in C} \Psi_i(N, v, \gamma) = v(C).$$

  Una regla de reparto es eficiente en componentes si los jugadores en cada una de las componentes distribuyen el valor de la misma entre ellos, y no se produce transferencia de utilidad entre las diferentes componentes en la situación de comunicación.

- *Equidad*, si:

  Para toda situación de comunicación (N, v, γ) en la clase $\mathcal{CS}$ y para toda arista $\{i, j\} \in \gamma$,

  $$\Psi_i(N, v, \gamma) - \Psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \Psi_j(N, v, \gamma) - \Psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

  Una regla de reparto es equitativa si el pago a cada uno de dos jugadores directamente conectados en la red se modifica en la misma cantidad si se elimina la arista que los une. Si una regla de reparto es equitativa, satisface el principio de que dos jugadores deben obtener el mismo beneficio de su acuerdo bilateral.

- *Contribuciones equilibradas*, si:

  Para toda situación de comunicación (N, v, γ) en la clase $\mathcal{CS}$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$,

  $$\Psi_i(N, v, \gamma) - \Psi_i(N, v, \gamma_{-j}) = \Psi_j(N, v, \gamma) - \Psi_j(N, v, \gamma_{-i}),$$

  donde, recordemos, $\gamma_{-k} = \gamma \setminus L_k(\gamma)$ es el subgrafo que resulta al eliminar en γ todas las aristas incidentes en el nodo k. Por tanto, una regla de reparto satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si, para cualesquiera dos jugadores i y j, el perjuicio que i puede ocasionar a j aislándose en la red (es decir, rompiendo todas sus relaciones directas -y, por tanto, todas sus relaciones- con los restantes jugadores) es el mismo que el que j puede ocasionar a i si adopta la misma actitud.

- *Estabilidad*, si:

  Para toda situación de comunicación (N, v, γ) en la clase $\mathcal{CS}$ y para toda arista $\{i, j\} \in \gamma$,

  $$\Psi_k(N, v, \gamma) - \Psi_k(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) \geq 0, \quad \text{para} \quad k = i, j.$$

  Así, una regla de reparto estable tiene la propiedad de que dos jugadores cualesquiera se benefician siempre si alcanzan un acuerdo bilateral de cooperación. La utilización de reglas de reparto estables incentivará por tanto los acuerdos bilaterales entre jugadores y, si el establecimiento de estos acuerdos bilaterales no tuviera coste alguno, parecería razonable esperar que la estructura de cooperación del juego fuera el grafo completo K_N.

Myerson (1977) probó que la regla de reparto definida en (1.8):

- Es la única que, si consideramos la clase $\mathcal{CS}^N$ de todas las situaciones de comunicación con conjunto de nodos N, satisface eficiencia en componentes y equidad [6]. El resultado constituye, en este sentido, la primera caracterización axiomática del valor de Myerson.

- Si nos restringimos a la clase de las situaciones de comunicación en las que el juego v es superaditivo, entonces la regla definida es también estable.

En un trabajo posterior, Myerson (1980) dio una segunda caracterización para su valor, al probar que:

- La regla de reparto definida en (1.8) es la única que, cuando consideramos la clase $\mathcal{CS}^N$ de todas las situaciones de comunicación con conjunto de nodos N, satisface

[6] En realidad, en el trabajo citado, Myerson considera que las reglas de reparto son, por definición, eficientes en componentes y, por tanto, el teorema correspondiente no se enuncia exactamente en estos términos.

eficiencia en componentes y contribuciones equilibradas [7].

Una caracterización alternativa del valor de Myerson aparece en Borm et al. (1992), en el dominio restringido de las situaciones de comunicación con conjunto de nodos N y con grafos libres de ciclos, y en el contexto de la búsqueda de caracterizaciones para otra regla de reparto para situaciones de comunicación, el valor posicional, del que se tratará a continuación. También van den Nouweland (1993) propone dos caracterizaciones distintas, que son válidas en la clase más general $\mathcal{CS}^N$. Una exposición más detallada de estos resultados puede encontrarse en Slikker y van den Nouweland (2001).

El juego de las aristas y el valor posicional

Meessen (1988) introdujo en su tesis de maestría (en neerlandés) otro tipo de juego asociado a una situación de comunicación, al que, posteriormente, Borm et al. (1992) dieron una mayor difusión. Para una situación de comunicación $(N, v, \gamma) \in CS_0^N$, el *juego de las aristas* $(\gamma, r_\gamma^v) \in G^\gamma$ (el espacio vectorial de los juegos con conjunto de jugadores γ) tiene función característica:

$$r_\gamma^v(A) = \sum_{T \in N/A} v(T), \quad \textit{para todo } A \in 2^\gamma. \tag{1.9}$$

Así, una coalición A de aristas recibe en r_γ^v la suma de los v-valores de aquellas coaliciones (de nodos) que sean componentes conexas de N en A.

Con esta definición, $r_\gamma^v(\emptyset) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$, que, en general, será una cantidad no nula. Pero decíamos antes que la función característica de un juego coalicional debe satisfacer $v(\emptyset) = 0$. Por este motivo, y para evitar complicaciones innecesarias, hemos definido el juego r_γ^v sólo para juegos v en G_0^N, el subespacio de los juegos 0-normalizados, con $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$. En adelante, y en lo que se refiera al valor posicional, nos

[7] Indirectamente, en este trabajo Myerson dio también una nueva caracterización axiomática del valor de Shapley. Su resultado implica que las propiedades de eficiencia, simetría y contribuciones equilibradas caracterizan el valor de Shapley. Cf. Winter (2002) para más detalles.

restringiremos siempre [8] a la clase G_0^N.

En relación con el problema de la herencia de propiedades en el caso del juego de las aristas, van den Nouweland y Borm (1991) probaron que, si (N, v) es un juego convexo y (N, γ) un grafo libre de ciclos, entonces el juego inducido r_γ^v es también un juego convexo.

El *valor posicional* de una situación de comunicación (N, v, γ), que notaremos $\pi(N, v, \gamma)$, se define entonces:

$$\pi_i(N, v, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{a \in L_i(\gamma)} Sh_a(\gamma, r_\gamma^v), \quad \textit{para todo } i \in N, \tag{1.10}$$

donde, recordemos, $L_i(\gamma)$ es el conjunto de aristas de γ incidentes en el nodo i. De la definición se sigue que el valor posicional de un jugador es la suma de las contribuciones de las diferentes aristas incidentes en el nodo correspondiente. La contribución de cada una de estas aristas se obtiene repartiendo por igual su valor de Shapley en el juego de las aristas entre los dos nodos incidentes en ella.

Borm et al. (1992) dieron una caracterización de esta regla de reparto para situaciones de comunicación (N, v, γ) en las que el grafo subyacente, γ, es un árbol. Posteriormente, Slikker (2005) caracterizó axiomáticamente el valor posicional para situaciones de comunicación generales, utilizando sólo dos propiedades: eficiencia en componentes y contribuciones equilibradas de las aristas. La primera propiedad es estándar, y la segunda, en la línea de las contribuciones equilibradas (de los nodos) de Myerson, se define en términos del cambio que experimentan los pagos al jugador i cuando el jugador j decide eliminar una de las aristas incidentes en él. Si la contribución del jugador j al pago al jugador i se define como la suma de estas diferencias cuando la arista l que j elimina varía en $L_j(\gamma)$, la propiedad establece que la contribución de i al pago a j y la contribución de j al pago a i deben ser iguales.

[8]Obviamente, si se estimase conveniente por algún motivo, siempre sería posible considerar un juego cualquiera $v \in G^N$ y definir alternativamente el juego de las aristas $r_\gamma^{v+}(A) = r_\gamma^v(A) - \sum_{i \in N} v(\{i\})$, que satisface $r_\gamma^{v+}(\emptyset) = 0$. Luego, tras repartir $r_\gamma^{v+}(\gamma) = \sum_{T \in N/\gamma} v(T) - \sum_{i \in N} v(\{i\})$ entre los jugadores, y si se pretende preservar la eficiencia, habría que añadir $v(\{i\})$ al pago a cada uno de ellos.

Más recientemente, Casajús (2007) caracteriza el valor posicional para situaciones de comunicación generales expresándolo en términos del valor de Myerson de un juego asociado al juego original. Sus resultados están en algún sentido relacionados con los que aparecen en Gómez et al. (2004b), que se presentan en la tercera sección del Capítulo 2 de esta memoria.

El valor de Hamiache

Por último, Hamiache (1999) introdujo un nuevo valor para situaciones de comunicación. Dadas una situación de comunicación (N, v, γ) y una regla de reparto Ψ, define un juego asociado, que llama $v^{\Psi,\gamma}$, y que depende de la regla de reparto. Para cada coalición $S \subset N$, interpreta $v^{\Psi,\gamma}(S)$ como la cantidad que la coalición S debería reclamar para sí misma. Utiliza para caracterizar su valor una propiedad, que llama consistencia asociada, y que requiere que el juego (N, v) en la situación de comunicación (N, v, γ) pueda ser sustituido por el juego asociado $(N, v^{\Psi,\gamma})$ sin que cambien los pagos que los jugadores recibirían si se aplicara en el reparto la regla Ψ. Bilbao et al. (2006) discuten este valor.

Capítulo 2

Sobre el cálculo del valor de Myerson y el valor posicional

2.1. Introducción

Para calcular el valor de Myerson o el valor posicional de una situación de comunicación (N, v, γ), se necesita en primer lugar determinar la función característica del correspondiente juego inducido: el juego restringido al grafo v^γ, cuyos jugadores son los nodos del grafo, en el caso del valor de Myerson, y el juego de las aristas r_γ^v, cuyos jugadores son las aristas, en el del valor posicional. Se trata de una tarea que, en general, es computacionalmente costosa pues, en el caso del valor de Myerson, y a partir de la definición de v^γ, es necesario primero calcular, para cada coalición $S \subset N$, el conjunto S/γ de todas las componentes conexas de S en el grafo parcial $(S, \gamma_{|S})$. Luego, quedaría el cálculo del valor de Shapley de este nuevo juego. Algo parecido puede decirse en el caso del valor posicional, en el que, además, tras calcular el valor de Shapley del juego inducido, debemos repartirlo entre los nodos incidentes en cada arista. Por tanto, resulta en general de interés el estudio de procedimientos que simplifiquen en la medida de lo posible estos cálculos.

Consideremos una situación de comunicación (N, v, γ) cualquiera. Como se ha expuesto en los preliminares de esta memoria, el juego v puede expresarse de forma única como combinación lineal de los juegos de la base de unanimidad, de la forma:

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ u_S.$$

La aplicación P_γ que, fijo el grafo (N,γ), hace corresponder a cada juego $(N,v) \in G^N$ el juego restringido al grafo (N,v^γ) definido en (1.6) es lineal (ver, por ejemplo, Owen (1986)), y es fácil probar que la aplicación Q_γ que, fijo de nuevo el grafo (N,γ), hace corresponder a cada juego $(N,v) \in G^N$ el juego de las aristas (γ, r_γ^v) definido en (1.9) también lo es. En consecuencia, tendremos:

$$v^\gamma = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ u_S^\gamma, \quad y \quad r_\gamma^v = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ r_\gamma^{u_S},$$

e interesa por tanto obtener expresiones explícitas para las imágenes $P_\gamma(u_S) = u_S^\gamma$ y $Q_\gamma(u_S) = r_\gamma^{u_S}$ de los juegos u_S de la base de unanimidad [1], pues, por la linealidad de ambas reglas de reparto, resulta:

$$\mu(N,v,\gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ \mu(N,u_S,\gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ Sh(N,u_S^\gamma), \quad \text{y}$$

$$\pi_i(N,v,\gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ \pi_i(N,u_S,\gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S)\ \frac{1}{2} \sum_{a \in L_i(\gamma)} Sh_a(\gamma, r_\gamma^{u_S}), \ \ i \in N.$$

Alternativamente, para toda situación de comunicación (N,v,γ), podemos escribir:

$$v^\gamma = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_{v^\gamma}(S)\ u_S,$$

y, por tanto, interesará también obtener expresiones que relacionen los coeficientes de unanimidad $\Delta_{v^\gamma}(S)$ del juego restringido al grafo con los del juego original, $\Delta_v(S)$. En

[1] Para que este tipo de expresiones resulten útiles al calcular el valor de Myerson o el valor posicional de una situación de comunicación, será necesario calcular previamente los coeficientes de unanimidad $\Delta_v(S)$ del juego original. Fernández et al. (2002) discuten las dificultades que involucra el cálculo de estos coeficientes en un trabajo en el que introducen algoritmos de complejidad polinomial para calcular el valor de Myerson en juegos de mayoría ponderada restringidos a árboles .

esta línea, Owen (1986) y van den Nouweland (1993) obtuvieron resultados para algunos tipos particulares de situaciones de comunicación.

De la última ecuación y teniendo en cuenta la linealidad del valor de Shapley, se deduce que:

$$\mu(N,v,\gamma) = Sh(N,v^\gamma) = Sh\left(N, \sum_{\emptyset\neq S\subset N} \Delta_{v^\gamma}(S)\ u_S\right) = \sum_{\emptyset\neq S\subset N} \Delta_{v^\gamma}(S)\ Sh(N,u_S),$$

lo que, supuestos conocidos los coeficientes de unanimidad $\Delta_{v^\gamma}(S)$ del juego restringido al grafo, y dado lo simple de la expresión del valor de Shapley para los juegos u_S de la base de unanimidad (ver la ecuación (1.4) en los preliminares de esta memoria), nos permitiría calcular con facilidad el valor de Myerson de una situación de comunicación cualquiera.

En este capítulo se reúnen diversos trabajos, todos ellos orientados en un sentido u otro a simplificar el problema del cálculo del valor de Myerson y/o el valor posicional. Lo que resta del capítulo se organiza del modo siguiente: En la segunda sección se presenta el concepto de conjunto de conexión (de nodos), que nos permite dar un expresión explícita del juego imagen u_S^γ para cada juego de la base de unanimidad u_S, y para un grafo cualquiera (N,γ). Para extender la utilidad de este tipo de resultados al cálculo del valor posicional, se define en la tercera sección del capítulo el concepto de grafo de conexión, y se presenta un procedimiento que permite calcular paralelamente, a partir de estos grafos de conexión, el valor de Myerson y el valor posicional de una situación de comunicación, prescindiendo de los juegos inducidos respectivos. En la cuarta y última, se considera cómo, para ciertas situaciones de comunicación, puede el grafo subyacente dividirse en varios subgrafos, de modo que el valor de Myerson de la situación de comunicación original pueda a su vez calcularse fácilmente a partir de los valores de Myerson de las situaciones de comunicación resultantes de esta división.

2.2. Conjuntos de conexión de nodos y cálculo del valor de Myerson

Como ya se ha anunciado, el resultado que se presenta en esta sección nos permitirá, dados un juego u_S de la base de unanimidad de G^N y un grafo cualquiera $(N,\gamma) \in \Gamma^N$, dar una expresión explícita para el juego imagen (o juego restringido al grafo) u_S^γ.

Consideremos otra vez una situación de comunicación (N, v, γ) cualquiera. Es fácil comprobar que, para todo $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$, y para todo $T \subset N$ con $T \neq \emptyset$:

$$u_S^\gamma(T) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } K \text{ conexo en } (N,\gamma) \text{ y tal que } S \subset K \subset T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Es decir, $u_S^\gamma(T) = 1$ si y sólo si existe algún $K \in T/\gamma$ tal que $S \subset K$ ó, lo que es lo mismo, si S es "conectable" (en el sentido de estar contenido en un conexo) en $(T, \gamma_{|T})$. Por tanto, u_S^γ puede considerarse como el juego de "conectar S en γ ". Si ahora escribimos este juego como combinación lineal de los de la base de unanimidad, tendremos:

$$u_S^\gamma = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \Delta_{u_S^\gamma}(T)\ u_T.$$

El cálculo de los coeficientes $\Delta_{u_S^\gamma}(T)$ para cada $T \subset N$ no es, en general, trivial. Sin embargo, de (2.1) se deduce fácilmente que, si $S \not\subset T$, es $u_S^\gamma(T) = 0$ y, por tanto, utilizando (1.1), que ha de ser $\Delta_{u_S^\gamma}(T) = 0$ salvo que sea $S \subset T$. Además, si T no es conexo, resulta también $\Delta_{u_S^\gamma}(T) = 0$ para todo $S \subset N$ (cf. Owen, 1986, th. 2). En consecuencia, para todo juego $v \in G^N$ y para todo $S \subset N$:

$$\Delta_{v^\gamma}(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \Delta_{u_T^\gamma}(S)\Delta_v(T) = \sum_{\emptyset \neq T \subset S} \Delta_{u_T^\gamma}(S)\Delta_v(T).$$

Owen(1986) estudió en detalle el caso particular en el que el grafo (N,γ) es un árbol. Probó en primer lugar que, en este caso, y para todo $T \subset N$, existe un único conjunto conexo minimal (en el sentido de la inclusión conjuntista) S que contenga a T. Probó también (th. 6) que, si γ es un árbol, entonces $u_S^\gamma = u_{H(N,\gamma,S)}$, donde, para cada $T \subset N$, $H(N,\gamma,T)$ es la envoltura conexa de T en el grafo (N,γ), definida en (1.5).

En consecuencia:

$$\Delta_{v^\gamma}(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N;\ H(N,\gamma,T)=S} \Delta_v(T), \quad \text{para todo } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}.$$

Van den Nouweland (1993) extendió la validez del resultado anterior al caso más general de los grafos ciclo-completos (ver la Ecuación (1.7) en el primer capítulo de esta memoria). El resultado que se presenta aquí está en la línea de los anteriores, pero no se impone en el mismo ninguna clase de restricciones sobre el grafo de comunicaciones.

2.2.1. Conjuntos de conexión

Con el propósito descrito de obtener una expresión explícita para cada u_S^γ en mente, introduciremos en esta subsección un par de definiciones y un ejemplo.

Definición 2.1 *Dados un grafo (N,γ) y una coalición no vacía $S \subset N$, diremos que $S^\gamma \subset N$ es un conjunto de conexión (de nodos) de S en (N,γ) si $S^\gamma \supset S$ y es conexo en (N,γ).*

Definición 2.2 *Dados un grafo (N,γ) y una coalición no vacía $S \subset N$, diremos que $S^\gamma \subset N$ es un conjunto minimal de conexión (de nodos) de S en (N,γ) si S^γ es un conjunto de conexión de S en (N,γ) y, para todo $T \subset N$ con $S \subset T \subsetneq S^\gamma$, T no es conexo en (N,γ).*

En otros términos, los conjuntos de conexión (de nodos) de una coalición S en el grafo (N,γ) son las coaliciones T que aparecen en la definición de envoltura conexa de un conjunto en (1.5). Notaremos $\mathtt{CS}(N,\gamma,S)$ la clase de todos los conjuntos de conexión (de nodos) de S en (N,γ), y $\mathtt{MCS}(N,\gamma,S)$ la subclase de los minimales.

La siguiente igualdad nos muestra la relación entre los conceptos de envoltura conexa y de conjunto de conexión o conjunto minimal de conexión. Dados un grafo (N,γ) y una coalición $S \subset N$, resulta:

$$H(N,\gamma,S) = \bigcap_{S^\gamma \in \texttt{CS}(N,\gamma,S)} S^\gamma = \bigcap_{S^\gamma \in \texttt{MCS}(N,\gamma,S)} S^\gamma. \tag{2.2}$$

En general, pueden existir varios conjuntos minimales de conexión de nodos de S en γ, uno, o ninguno. Pero, si (N,γ) es un árbol, entonces, para todo $S \subset N$, $|\texttt{MCS}(N,\gamma,S)| = 1$. En el caso ligeramente más general de que (N,γ) sea un grafo libre de ciclos o, más general aún, un grafo ciclo-completo, se cumple para todo $S \subset N$ que $|\texttt{MCS}(N,\gamma,S)| = 0$ ó 1. Estos son los casos cubiertos por los resultados citados de Owen (1986) y van den Nouweland (1993). El siguiente ejemplo ilustra la situación en un grafo que no es ciclo-completo (y que, por tanto, ni es libre de ciclos ni es tampoco un árbol).

Ejemplo 2.1 *Sean* $N = \{1,\ldots,8\}$ *y* $\gamma = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{1,5\},\{6,7\},\{7,8\}\}$, *y consideremos el grafo* (N,γ) *(Fig. 2.1). En este caso:*

i) Si $S_1 = \{1,3\}$, *resultan* $\texttt{MCS}(N,\gamma,S_1) = \{\{1,2,3\},\{1,3,4,5\}\}$ *y* $\texttt{CS}(N,\gamma,S_1) = \{\{1,2,3\},\{1,3,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$.

ii) Si $S_2 = \{6,8\}$, *resultan* $\texttt{CS}(N,\gamma,S_2) = \texttt{MCS}(N,\gamma,S_2) = \{\{6,7,8\}\}$.

iii) Si $S_3 = \{2,7\}$, *resultan* $\texttt{CS}(N,\gamma,S_3) = \texttt{MCS}(N,\gamma,S_3) = \emptyset$.

Figura 2.1: Grafo (N,γ) en el Ejemplo 2.1

Obviamente, en el ejemplo anterior, resultan $u^{\gamma}_{\{2,7\}} = \mathbf{0}$, $u^{\gamma}_{\{6,8\}} = u_{\{6,7,8\}}$, y sólo nos resulta problemático el cálculo de $u^{\gamma}_{\{1,3\}}$. Más en general, resulta complejo el cálculo de u^{γ}_{S} sólo en el caso de que sea $|\,\mathtt{MCS}(N,\gamma,S)| \geq 2$. El resultado que se presenta a continuación nos permite resolver este problema.

2.2.2. Cálculo del valor de Myerson

La siguiente proposición nos da una expresión explícita del juego imagen, para juegos de la base de unanimidad, y para un grafo cualquiera (N,γ). A continuación, utilizaremos este resultado para calcular el valor de Myerson de una situación de comunicación (N,v,γ) arbitraria.

De (2.1) se sigue que, si $\mathtt{MCS}(N,\gamma,S) = \emptyset$, entonces $u^{\gamma}_{S} = \mathbf{0}$ (el vector nulo de G^N). En consecuencia, nos ocuparemos sólo del caso en el que $\mathtt{MCS}(N,\gamma,S) \neq \emptyset$.

Proposición 2.1 *Dados un grafo (N,γ) y $S \subset N$, con $S \neq \emptyset$, si $\mathtt{MCS}(N,\gamma,S) = \{S^{\gamma}_{k}\}_{k=1}^{r(S)}$, entonces:*

$$u^{\gamma}_{S} = \mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} (\mathbf{1} - u_{S^{\gamma}_{k}}), \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{1}$ es el juego definido $\mathbf{1}(S) = 1$ para todo $S \neq \emptyset$, es decir, el elemento unidad del producto interno definido en G^N.

Demostración: Sea $T \subset N$. Entonces:

$$\left(\mathbf{1} - u_{S^{\gamma}_{k}}\right)(T) = \begin{cases} 0, & \text{si } S^{\gamma}_{k} \subset T, \\ 1, & \text{si } S^{\gamma}_{k} \not\subset T, \end{cases}$$

y, por tanto:

$$\left(\mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} (\mathbf{1} - u_{S^{\gamma}_{k}})\right)(T) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } k \in \{1,\ldots,r(S)\} \text{ tal que } S^{\gamma}_{k} \subset T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Así, a la vista de la definición de los conjuntos minimales de conexión S_k^γ, los primeros miembros de las igualdades (2.4) y (2.1) coinciden para todo $T \subset N$, con lo que se cierra la demostración. $\square$

Puesto que, para todos Q y $R \subset N$, es $u_Q \cdot u_R = u_{Q\cup R}$, la igualdad (2.3) puede reescribirse:

$$u_S^\gamma = \sum_{k=1}^{r(S)} u_{S_k^\gamma} - \sum_{k<l} u_{S_k^\gamma \cup S_l^\gamma} + \sum_{k<l<m} u_{S_k^\gamma \cup S_l^\gamma \cup S_m^\gamma} + \cdots + (-1)^{r(S)+1} u_{\cup_{k=1}^{r(S)} S_k^\gamma}. \tag{2.5}$$

Obsérvese también que, si $Q \subset R$, entonces $(\mathbf{1} - u_Q)(\mathbf{1} - u_R) = \mathbf{1} - u_Q$. Por tanto, si $\mathtt{MCS}(N, \gamma, S) \neq \emptyset$ y $T \in \mathtt{CS}(N, \gamma, S)$, entonces:

$$u_S^\gamma = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - u_T) \prod_{k=1}^{r(S)} (\mathbf{1} - u_{S_k^\gamma}), \tag{2.6}$$

y, en consecuencia, la proposición anterior sigue siendo válida si sustituimos en su enunciado $\mathtt{MCS}(N, \gamma, S)$ por $\mathtt{CS}(N, \gamma, S)$ o, más en general, por cualquier familia de conjuntos de conexión (de nodos) de S en (N, γ) que contenga a $\mathtt{MCS}(N, \gamma, S)$, y en la que podría haber incluso elementos repetidos. A pesar de ello, la expresión de u_S^γ dada en la Ecuación (2.3) reducirá considerablemente, en general, la cantidad de cálculos pues, para un S dado, el cardinal de $\mathtt{MCS}(N, \gamma, S)$ es con frecuencia mucho menor que el de $\mathtt{CS}(N, \gamma, S)$.

Teniendo en cuenta la linealidad del valor de Shapley, sabemos que, para todo $i \in N$:

$$\mu_i(N, v, \gamma) = Sh_i(N, v^\gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) Sh_i(N, u_S^\gamma).$$

Ahora, para cada $S \subset N$ con $\emptyset \neq S$, si $\mathtt{MCS}(N, \gamma, S) = \{S_k^\gamma\}_{k=1}^{r(S)}$, tenemos, por (2.5):

$$Sh_i(N, u_S^\gamma) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r(S)} Sh_i(N, u_{S_k^\gamma}) - \sum_{k<l}^{r(S)} Sh_i(N, u_{S_k^\gamma \cup S_l^\gamma}) + \cdots + (-1)^{r(S)+1} Sh_i(N, u_{\cup_{k=1}^{r(S)} S_k^\gamma}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r(S)} \frac{1}{s_k} \delta_i(N, S_k^\gamma) - \sum_{k<l} \frac{1}{s_{k,l}} \delta_i(N, S_k^\gamma \cup S_l^\gamma) + \cdots + (-1)^{r(S)+1} \frac{1}{s_{1,\ldots,r(S)}} \delta_i(N, \cup_{k=1}^{r(S)} S_k^\gamma),$$

donde, para todos $m, k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, r(S)\}$ con $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$, $s_{k_1,\ldots,k_m}$ es el cardinal de $\cup_{j=1}^m S_{k_j}^\gamma$, y $\delta(N, \cup_{j=1}^m S_{k_j}^\gamma)$ el correspondiente vector indicador, definido en (1.2).

Por último, si pretendemos calcular el valor de Myerson de una situación de comunicación (N, v, γ), necesitamos determinar el conjunto $\mathtt{MCS}(N, \gamma, S)$ para cada $S \subset N$. Como el cardinal de 2^N crece rápidamente el crecer n, esto requerirá con frecuencia un volumen considerable de cómputo. El ejemplo siguiente ilustra el hecho de que la anterior afirmación es válida incluso para valores pequeños de n y grafos relativamente simples.

Ejemplo 2.2 *Consideremos la situación de comunicación* (N, v, γ)*, con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, el grafo* $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ *(Fig. 2.2), y* v *el juego de los "gastos generales", definido:* $v(S) = -1$*, si* $\emptyset \neq S \subset N$*.*

Figura 2.2: El grafo (N, γ) del Ejemplo 2.2

Es fácil deducir de la Ecuación (1.1) que los coeficientes de unanimidad del juego v vienen dados por:

$$\Delta_v(S) = (-1)^s, \quad si \;\; \emptyset \neq S \subset N. \tag{2.7}$$

En consecuencia:

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) u_S = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} (-1)^s u_S,$$

y, por tanto:

$$\mu(N, v, \gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} (-1)^s \mu(N, u_S, \gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} (-1)^s Sh(N, u_S^\gamma). \tag{2.8}$$

A continuación, necesitaremos calcular $Sh(N, u_S^\gamma)$ *para cada una de las* $2^5 - 1 = 31$ *coaliciones no vacías en* N.

Por ejemplo, si $S = \{3, 5\}$*, entonces* $\texttt{MCS}(N, \gamma, \{3, 5\}) = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$ *y, por la Proposición 2.1:*

$$\mu(N, u_{\{3,5\}}, \gamma) = Sh(N, u^\gamma_{\{3,5\}}) = \frac{\delta(N, \{2, 3, 5\})}{|\{2, 3, 5\}|} + \frac{\delta(N, \{3, 4, 5\})}{|\{3, 4, 5\}|} - \frac{\delta(N, \{2, 3, 4, 5\})}{|\{2, 3, 4, 5\}|} =$$

$$= \frac{1}{3}\,(0, 1, 1, 0, 1) + \frac{1}{3}\,(0, 0, 1, 1, 1) - \frac{1}{4}\,(0, 1, 1, 1, 1) = \Big(0, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}\Big).$$

Repitiendo este procedimiento para cada una de las 30 *coaliciones restantes y aplicando (2.8), se obtiene:*

$$\mu(N, v, \gamma) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\Big).$$

Veremos, en la última sección del presente capítulo, cómo, para determinados juegos, incluido el juego de los gastos generales que aparece en el ejemplo precedente, el cálculo puede abreviarse considerablemente.

2.3. Una aproximación unificada al valor de Myerson y el valor posicional

Tanto el valor de Myerson como el valor posicional de una situación de comunicación (N, v, γ) dependen del correspondiente juego inducido: el juego restringido al grafo, cuyos jugadores son los nodos del grafo, en el caso del valor de Myerson, y el juego de las aristas, cuyos jugadores son las aristas del grafo, si se trata del valor posicional.

Como se anunció en la introducción del capítulo, el propósito del trabajo que se expone en esta sección es presentar una aproximación más global, que hemos llamado "unificada", y que nos permita calcular de un modo similar el valor de Myerson o el valor posicional de una situación de comunicación. En nuestra propuesta, los distintos juegos inducidos desaparecen sin dejar rastro y, en su lugar, aparecen las reglas de reparto para grafos. Estas reglas de reparto para grafos no dependen del juego v, y pueden ser funciones muy simples del grafo, como el indicador (relativo) si se trata del valor de Myerson, o el grado (relativo) en el caso del valor posicional.

Además, probaremos que, en aquellas situaciones de comunicación en las que el juego v es un juego de unanimidad u_S, la relación entre cada uno de los dos valores y la correspondiente regla de reparto para grafos viene dada por el bien conocido principio de inclusión-exclusión. De este modo, ambos valores pueden expresarse como una suma alternada de términos que corresponden al indicador relativo (o el grado relativo) de los diferentes grafos de conexión (o conjuntos de conexión **de aristas**) de S en γ.

El resultado que se obtiene está en la línea del que se ha presentado en la segunda sección de este capítulo, y que nos permite calcular el valor de Myerson -pero no el posicional- de una situación de comunicación (N, u_S, γ) en términos de los conjuntos de conexión **de nodos** de S en γ, utilizando también el principio de inclusión-exclusión. Por otra parte, extiende a situaciones de comunicación con un grafo cualquiera los resultados que, para grafos que no contengan ciclos, se obtienen en Owen (1986), para el valor de Myerson, y en Borm et al. (1992), para el valor posicional.

El resto de la sección se organiza del modo siguiente: en la Subsección 1 se definen formalmente los conceptos de regla de reparto para grafos y de grafo de conexión; en la 2, se presenta el principal resultado del trabajo, que se ilustra por medio de un ejemplo, mientras que la Subsección 3 cierra esta parte del trabajo con un par de breves puntualizaciones.

2.3.1. Reglas de reparto para grafos y grafos de conexión

Lo que sigue depende esencialmente de los diferentes modos de asignar valores a los nodos de un grafo no vacío, independientemente del juego en la situación de comunicación. Una *regla de reparto para grafos* será meramente una función $h : \Gamma^N \setminus \emptyset \to I\!R^n$. Las únicas dos reglas de reparto para grafos que se utilizarán en lo que sigue son [2]:

- El *indicador relativo*, que se define:

$$c^r(N,\gamma) = \frac{\delta(N, D(\gamma))}{|D(\gamma)|}, \tag{2.9}$$

  donde $D(\gamma) = \{i \in N \text{ tales que } d_i(N,\gamma) > 0\}$ es el conjunto de nodos no aislados en el grafo (N,γ) y, recordemos, $d_i(N,\gamma)$ es el grado del nodo i en el grafo γ, es decir, el número de aristas de γ incidentes en i.

- El *grado relativo*, que se define:

$$d^r(N,\gamma) = \frac{(d_i(N,\gamma))_{i\in N}}{2|\gamma|}. \tag{2.10}$$

Veamos ahora algunas definiciones adicionales.

Definición 2.3 *Dados un grafo (N,γ) y una coalición no vacía $S \subset N$, diremos que $\gamma^S \subset \gamma$ es un grafo de conexión [3] de S en (N,γ) si S es conexo en (N,γ^S).*

[2] En realidad, se consideran en el trabajo reglas de reparto para grafos *normalizadas*, en el sentido de que repartan la unidad, es decir, tales que, para todo grafo $\gamma \in \Gamma^N \setminus \emptyset$, satisfagan $\sum_{i\in N} h_i(N,\gamma) = 1$.

[3] En Gómez et al. (2004,b), llamábamos conjunto de conexión (de aristas) a lo que aquí llamamos grafo de conexión. Se trataba de mantener el paralelismo con los conjuntos de conexión (de nodos) que aparecen en la Sección 1 de este capítulo. Pero los conjuntos de aristas son grafos, y parece más natural y, sobre todo, más conciso, "grafo de conexión" que "conjunto de conexión (de aristas)".

Definición 2.4 *Dados un grafo* (N, γ) *y una coalición no vacía* $S \subset N$*, diremos que* $\gamma^S \subset \gamma$ *es un grafo minimal de conexión de* S *en* (N, γ) *si* S *es conexo en* (N, γ^S) *y, para todo* $\eta \subsetneq \gamma^S$*,* S *no es conexo en* (N, η)*.*

Obsérvese que, dados un grafo (N, γ) y una coalición no vacía $S \subset N$, pueden existir varios grafos minimales de conexión de S en γ, uno, o ninguno. Notaremos $\mathtt{CG}(N, \gamma, S)$ la clase de todos los grafos de conexión de S en (N, γ) y $\mathtt{MCG}(N, \gamma, S)$ la subclase de los minimales.

Ejemplo 2.3 *Sean* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y* $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ *, como en el Ejemplo 2.2 (Fig. 2.2). Para* $S = \{1, 4\}$*, resulta* $\mathtt{MCG}(N, \gamma, S) = \{\gamma_1^S, \gamma_2^S, \gamma_3^S\}$*, con:* $\gamma_1^S = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$*,* $\gamma_2^S = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$ *y* $\gamma_3^S = \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$*.*

Ejemplo 2.4 *Sea de nuevo* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, pero ahora* $\eta = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$*, y consideremos el grafo* (N, η) *(Fig. 2.3). Si tomamos otra vez* $S = \{1, 4\}$*, tenemos que* $\mathtt{MCG}(N, \eta, S) = \emptyset$*, y si es* $T = \{2, 5\}$*, resulta* $\mathtt{MCG}(N, \eta, T) = \left\{\eta_1^T\right\}$*, con* $\eta_1^T = \{\{2, 4\}, \{4, 5\}\}$*.*

Figura 2.3: El grafo (N, η) en el Ejemplo 2.4

2.3.2. Cálculo del valor de Myerson y el valor posicional

En este apartado se presentarán los principales resultados de la sección, que nos permitirán calcular el valor de Myerson y el valor posicional de una situación de comunicación del tipo (N, u_s, γ) (es decir, con un juego u_s de la base de unanimidad como juego subyacente) utilizando el principio de inclusión-exclusión. Se probará que ambos valores pueden expresarse como un suma alternada sobre los distintos subgrafos de γ que conectan S y que, de hecho, uno y otro difieren meramente en la regla de reparto para grafos asociada.

Comenzaremos con una definición que relaciona las reglas de reparto para grafos y los grafos de conexión presentados en el apartado anterior con las reglas de reparto para situaciones de comunicación.

Definición 2.5 *Diremos que una regla de reparto $\Psi : CS^N \to I\!R^n$ admite una descomposición según el principio de inclusión-exclusión en términos de una regla de reparto para grafos si existe $h : \Gamma^N \setminus \emptyset \to I\!R^n$ tal que, para cada $S \subset N$ con $s \geq 2$, resulta:*

a) Si $\texttt{MCG}(N,\gamma,S) = \{\gamma_k^S\}_{k=1}^{r(S)}$*, entonces:*

$$\Psi(N,u_S,\gamma) = \sum_{k=1}^{r(S)} h(N,\gamma_k^S) - \sum_{k<m} h(N,\gamma_k^S \cup \gamma_m^S) + \cdots + (-1)^{r(S)+1} h(N, \cup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S). \quad (2.11)$$

y b), si $\texttt{MCG}(N,\gamma,S) = \emptyset$*, entonces* $\Psi(N,u_S,\gamma) = \boldsymbol{0}$*, el vector nulo en* $I\!R^n$*.*

En este caso diremos también que Ψ satisface la propiedad que llamaremos para abreviar regularidad, o que Ψ es regular en términos de la regla de reparto para grafos h.

Con el fin de probar que tanto el valor de Myerson como el valor posicional satisfacen esta propiedad de regularidad, demostraremos primero un par de resultados paralelos, uno para cada una de las dos reglas de reparto citadas:

Lema 2.1 *Sean $(N,u_S,\gamma) \in CS^N$ con $s \geq 2$. Entonces, el juego restringido (el juego de Myerson) (N,u_S^γ) tiene función característica:*

$$u_S^\gamma = \begin{cases} \mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} \left[\mathbf{1} - u_{D(\gamma_k^S)}\right], & si\ \ \texttt{MCG}(N,\gamma,S) = \{\gamma_k^S\}_{k=1}^{r(S)}, \\ \mathbf{0}, & si\ \ \texttt{MCG}(N,\gamma,S) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{1}$ *es de nuevo el elemento unidad del producto interno definido en G^N.*

Demostración: La igualdad es cierta trivialmente si $\texttt{MCG}(N,\gamma,S) = \emptyset$ pues, en este caso, como vimos en la sección anterior que ocurría si $\texttt{MCS}(N,\gamma,S) = \emptyset$ (de hecho, ambas condiciones son equivalentes), es $u_S^\gamma = \mathbf{0}$. Si $s \geq 2$ y $\texttt{MCG}(N,\gamma,S) = \{\gamma_k^S\}_{k=1}^{r(S)}$, entonces, para cada $T \subset N$, tenemos:

$$u_S^{\gamma}(T) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } K \text{ conexo en } (N,\gamma) \text{ tal que } S \subset K \subset T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, la igualdad:

$$\left(\mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} [\mathbf{1} - u_{D(\gamma_k^S)}]\right)(T) = 1,$$

se satisface si y sólo si existe algún $\gamma_k^S \in \mathtt{MCG}(N,\gamma,S)$ tal que $(\mathbf{1} - u_{D(\gamma_k^S)})(T) = 0$ ó, equivalentemente, $u_{D(\gamma_k^S)}(T) = 1$. Pero esto es cierto sólo si $D(\gamma_k^S)$, que es un conjunto conexo que contiene a S, está contenido en T. Si comparamos con la expresión para $u_S^{\gamma}(T)$ en (2.1), veremos que hemos probado que (2.12) se satisface en todos los casos. □

Lema 2.2 *Sea* $(N, u_S, \gamma) \in CS_0^N$. *Entonces, el juego de las aristas* $(\gamma, r_{\gamma}^{u_S})$ *tiene función característica:*

$$r_{\gamma}^{u_S} = \begin{cases} \mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} [\mathbf{1} - u_{\gamma_k^S}], & si \;\; \mathtt{MCG}(N,\gamma,S) = \{\gamma_k^S\}_{k=1}^{r(S)}, \\ \mathbf{0}, & si \;\; \mathtt{MCG}(N,\gamma,S) = \emptyset, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde, obviamente, para cada grafo de conexión γ_k^S, $(\gamma, u_{\gamma_k^S})$ *es el juego correspondiente en la base de unanimidad de* G^{γ}.

Demostración: Supongamos que S es tal que $\mathtt{MCG}(N,\gamma,S) \neq \emptyset$, pues el resultado es trivial cuando $\mathtt{MCG}(N,\gamma,S) = \emptyset$. De la definición del juego de las aristas en (1.9) se sigue fácilmente que, para todo $\eta \subset \gamma$:

$$r_{\gamma}^{u_S}(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } K \text{ conexo en } (N,\eta) \text{ tal que } S \subset K, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otra parte, $$\left(\mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} [\mathbf{1} - u_{\gamma_k^S}]\right)(\eta) = 1$$

si y sólo si existe algún $\gamma_k^S \in \mathtt{MCG}(N,\gamma,S)$ tal que $(\mathbf{1} - u_{\gamma_k^S})(\eta) = 0$, lo que es equivalente a que $\gamma_k^S \subset \eta$. Así, $D(\gamma_k^S)$ es conexo en (N,η) y tal que $S \subset D(\gamma_k^S)$ y, por tanto, se satisface (2.13). $\square$

Nótese que los dos lemas anteriores pueden reescribirse sustituyendo en el enunciado $\mathtt{MCG}(N,\gamma,S)$ por $\mathtt{CG}(N,\gamma,S)$ o, más en general, por cualquier familia de grafos de conexión de S en (N,γ) que contenga a $\mathtt{MCG}(N,\gamma,S)$ (y en la que podría haber incluso elementos repetidos). A pesar de ello, las expresiones para u_S^γ y $r_\gamma^{u_S}$ dadas en los Lemas 2.1 y 2.2 respectivamente, serán, en general, considerablemente más eficientes desde el punto de vista computacional.

Teorema 2.1 *Tanto el valor de Myerson* $\mu : CS^N \to I\!R^n$ *como el valor posicional* $\pi : CS_0^N \to I\!R^n$ *son reglas de reparto regulares.*

Demostración: Lo probaremos en primer lugar para μ.

Sea $(N,u_S,\gamma) \in CS^N$ con $s \geq 2$. Entonces:

i) Si $\mathtt{MCG}(N,\gamma,S) = \emptyset$, es $u_S^\gamma = \mathbf{0}$ y el resultado es trivial.

ii) y si $\mathtt{MCG}(N,\gamma,S) = \{\gamma_k^S\}_{k=1}^{r(S)} \neq \emptyset$ se tiene, por el Lema 2.1:

$$\mu(N,u_S,\gamma) = Sh(N,u_S^\gamma) = Sh\left(N,\ \mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} [\mathbf{1} - u_{D(\gamma_k^S)}]\right).$$

Además:

$$\mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} [\mathbf{1} - u_{D(\gamma_k^S)}] = \sum_{k=1}^{r(S)} u_{D(\gamma_k^S)} - \sum_{k<m} u_{D(\gamma_k^S)\cup D(\gamma_m^S)} + \ldots + (-1)^{r(S)+1} u_{\bigcup_{k=1}^{r(S)} D(\gamma_k^S)}.$$

Dados dos subgrafos $\eta_1,\ \eta_2 \subset \gamma$, se cumple trivialmente que $D(\eta_1 \cup \eta_2) = D(\eta_1) \cup D(\eta_2)$ y, por tanto, y utilizando la linealidad del valor de Shapley, resulta:

$$\mu(N,u_S,\gamma) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r(S)} Sh(N,u_{D(\gamma_k^S)}) - \sum_{k<m} Sh(N,u_{D(\gamma_k^S \cup \gamma_m^S)}) + \ldots + (-1)^{r(S)+1}\ Sh(N,u_{D(\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S)}).$$

Utilizando ahora la expresión para el valor de Shapley de los juegos de unanimidad y la definición del indicador relativo c^r en (2.9), tenemos:

$$\mu(N, u_S, \gamma) = \sum_{k=1}^{r(S)} c^r(N, \gamma_k^S) - \sum_{k<m} c^r\left(N, \gamma_k^S \cup \gamma_m^S\right) + \ldots + (-1)^{r(S)+1}\, c^r\left(N, \bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S\right).$$

En consecuencia, el valor de Myerson μ es regular en términos de la regla de reparto para grafos que hemos llamado indicador relativo, como resulta obvio si hacemos $h = c^r$ en la igualdad (2.11).

Consideremos ahora el valor posicional π.

Sean $(N, u_S, \gamma) \in CS_0^N$, $S \subset N$, y $\texttt{MCG}(N, \gamma, S) = \{\gamma_k^S\}_{k=1}^{r(S)}$ (en otro caso, el resultado es trivial). Entonces, para cada nodo $i \in N$:

$$\pi_i(N, u_S, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{a \in L_i(\gamma)} Sh_a(\gamma, r_\gamma^{u_S}) = \frac{1}{2} \sum_{a \in \gamma} \delta_a(\gamma, L_i(\gamma)) Sh_a(\gamma, r_\gamma^{u_S}), \tag{2.14}$$

donde, recordemos, $L_i(\gamma)$ es el conjunto de aristas de γ incidentes en el nodo i y, para cada subgrafo $\eta \subset \gamma$, $\delta(\gamma, \eta)$ es el vector indicador de η en γ.

Por el Lema 2.2, para cada arista $a \in \gamma$ resulta:

$$Sh_a(\gamma, r_\gamma^{u_S}) = Sh_a\left(\gamma,\ \mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} (\mathbf{1} - u_{\gamma_k^S})\right).$$

Además, tenemos:

$$\mathbf{1} - \prod_{k=1}^{r(S)} (\mathbf{1} - u_{\gamma_k^S}) = \sum_{k=1}^{r(S)} u_{\gamma_k^S} - \sum_{k<m} u_{\gamma_k^S \cup \gamma_m^S} + \ldots + (-1)^{r(S)+1} u_{\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S},$$

y en consecuencia, por la linealidad del valor de Shapley:

$$Sh_a(\gamma, r_\gamma^{u_S}) = \sum_{k=1}^{r(S)} Sh_a(\gamma, u_{\gamma_k^S}) - \sum_{k<m} Sh_a(\gamma, u_{\gamma_k^S \cup \gamma_m^S}) + \ldots + (-1)^{r(S)+1} Sh_a(\gamma, u_{\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S}).$$

Teniendo en cuenta la expresión del valor de Shapley para los juegos de unanimidad:

$$Sh_a(\gamma, r_\gamma^{u_S}) = \sum_{k=1}^{r(S)} \frac{\delta_a(\gamma,\gamma_k^S)}{|\gamma_k^S|} - \sum_{k<m} \frac{\delta_a(\gamma,\gamma_k^S \cup \gamma_m^S)}{|\gamma_k^S \cup \gamma_m^S|} + \ldots + (-1)^{r(S)+1} \frac{\delta_a(\gamma, \bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S)}{|\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S|}. \quad (2.15)$$

Ahora, sustituyendo la expresión de (2.15) en (2.14), obtenemos:

$$\pi_i(N, u_S, \gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{a\in\gamma} \delta_a(\gamma, L_i(\gamma)) \sum_{k=1}^{r(S)} \delta_a(\gamma,\gamma_k^S)\frac{1}{|\gamma_k^S|} - \frac{1}{2}\sum_{a\in\gamma} \delta_a(\gamma, L_i(\gamma)) \sum_{k<m} \delta_a(\gamma,\gamma_k^S \cup \gamma_m^S)\frac{1}{|\gamma_k^S \cup \gamma_m^S|} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{r(S)+1} \frac{1}{2}\sum_{a\in\gamma} \delta_a(\gamma, L_i(\gamma))\ \delta_a\left(\gamma, \bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S\right) \frac{1}{|\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r(S)} \frac{1}{2}\sum_{a\in\gamma} \delta_a(\gamma, L_i(\gamma)\cap\gamma_k^S)\frac{1}{|\gamma_k^S|} - \sum_{k<m} \frac{1}{2}\sum_{a\in\gamma} \delta_a(\gamma, L_i(\gamma)\cap(\gamma_k^S \cup \gamma_m^S))\frac{1}{|\gamma_k^S \cup \gamma_m^S|} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{r(S)+1} \frac{1}{2}\sum_{a\in\gamma} \delta_a\left(\gamma, L_i(\gamma)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S\right)\right) \frac{1}{|\bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S|}, \quad (2.16)$$

donde, para cada $k = 1, \ldots, r(S)$, $L_i(\gamma)\cap\gamma_k^S$ es el conjunto de aristas del grafo (N, γ_k^S) incidentes en el nodo i; para $k < m$, $L_i(\gamma)\cap(\gamma_k^S \cup \gamma_m^S)$ es el conjunto de aristas del grafo $(N, \gamma_k^S \cup \gamma_m^S)$ incidentes en i, y así sucesivamente.

Por último, teniendo en cuenta (2.10), la expresión (2.16) es equivalente a:

$$\pi_i(N, u_S, \gamma) = \sum_{k=1}^{r(S)} d_i^r(N, \gamma_k^S) - \sum_{k<m} d_i^r(N, \gamma_k^S \cup \gamma_m^S) + \cdots + (-1)^{r(S)+1} d_i^r\left(N, \bigcup_{k=1}^{r(S)} \gamma_k^S\right),$$

y, por tanto, el valor posicional satisface la propiedad que hemos llamado regularidad en términos de la regla de reparto para grafos grado relativo. □

Del teorema previo se siguen trivialmente los dos resultados siguientes:

Corolario 2.1 *El valor de Myerson es la única regla de reparto definida en CS^N que satisface linealidad, eficiencia en componentes y regularidad en términos de la regla de reparto para grafos indicador relativo.*

Corolario 2.2 *El valor posicional es la única regla de reparto definida en CS_0^N que satisface linealidad y regularidad en términos de la regla de reparto para grafos grado relativo.*

Sirva el siguiente ejemplo como ilustración del método descrito para calcular tanto el valor de Myerson como el valor posicional.

Ejemplo 2.5 *Consideremos la situación de comunicación (N, u_S, γ), siendo (N, γ) el grafo de los Ejemplos 2.2 y 2.3 (Fig. 2.2), y $S = \{1, 4\}$. Como se vio en el último de los ejemplos citados, es* $\texttt{MCG}(N, \gamma, \{1, 4\}) = \{\gamma_1^S, \gamma_2^S, \gamma_3^S\}$, *con* $\gamma_1^S = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, $\gamma_2^S = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$ *y* $\gamma_3^S = \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$. *En consecuencia, si ψ es una regla de reparto en CS^N (en realidad, podemos restringirnos en este caso a reglas de reparto en CS_0^N, pues $u_{\{1,4\}}$ es un juego 0-normalizado) que satisface regularidad en términos de una regla de reparto para grafos h, resultará:*

$$\psi(N, u_{\{1,4\}}, \gamma) = h(N, \gamma_1^S) + h(N, \gamma_2^S) + h(N, \gamma_3^S) - h(N, \gamma_1^S \cup \gamma_2^S) -$$

$$-h(N, \gamma_1^S \cup \gamma_3^S) - h(N, \gamma_2^S \cup \gamma_3^S) + h(N, \gamma_1^S \cup \gamma_2^S \cup \gamma_3^S).$$

En particular, tomando $h = c^r$ obtendremos el valor de Myerson:

$$\mu(N, u_{\{1,4\}}, \gamma) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right),$$

y tomando $h = d^r$, el valor posicional:

$$\pi(N, u_{\{1,4\}}, \gamma) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0\right) + \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8},0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{12},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{19}{60},\frac{9}{20},\frac{1}{20},\frac{2}{15},\frac{1}{20}\right).$$

2.3.3. Algunas observaciones

- Si (N,γ) es un grafo libre de ciclos, entonces, para todo $S \subset N$, es $|\mathtt{MCG}(N,\gamma,S)| \leq 1$, y los resultados que, para este tipo de situaciones de comunicación, aparecen en Owen (1986) y en Borm et al. (1992) (para el valor de Myerson y para el valor posicional, respectivamente), se convierten en corolarios del Teorema 2.1.

- En la Sección 2 de este mismo capítulo se daba un procedimiento alternativo para el cálculo del valor de Myerson de una situación de comunicación (N,u_S,γ) en términos de los conjuntos minimales de conexión (de nodos) de S en el grafo (N,γ). Este método es, en la mayor parte de los casos, computacionalmente más eficiente que el descrito aquí. Por tanto, consideramos que el principal interés de los resultados expuestos en esta sección estriba en el paralelismo que establecen entre el valor de Myerson y el valor posicional, y no en su utilidad desde el punto de vista del cálculo, al menos en el caso del valor de Myerson.

  Para ilustrar esta afirmación, considérese de nuevo la situación de comunicación del Ejemplo 2.5 (Grafo (N,γ) en la Fig. 2.2). Para la coalición $S=\{1,4\}$ existe un único conjunto minimal de conexión de nodos, $S_1^\gamma=\{1,2,4\}$ (pero tres grafos minimales de conexión, como se vio en el Ejemplo 2.3). Así, tenemos directamente que: center $\mu(N,u_{\{1,4\}},\gamma)=c^r(N,\gamma|_{\{1,2,4\}})=\frac{1}{|\{1,2,4\}|}\,\delta(N,\{1,2,4\})=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},0\right)$, cálculo que resulta considerablemente más breve que el que con el mismo fin aparece en el Ejemplo 2.5, y en el que se utilizan los grafos minimales de conexión.

  Desafortunadamente, el argumento no es aplicable al caso del valor posicional, para cuyo cálculo necesitaremos utilizar los grafos de conexión.

2.4. División de grafos y cálculo del valor de Myerson

Los resultados obtenidos en las secciones anteriores de este capítulo ponen de manifiesto que el volumen de cálculo asociado a la tarea de determinar el valor de Myerson de una situación de comunicación (N, v, γ) crece muy rápidamente al aumentar el tamaño y/o la densidad del grafo (es decir, el número de nodos, n, y la proporción de aristas en γ sobre el total posible, respectivamente). En esta última sección exploraremos la posibilidad de dividir un grafo de comunicaciones (N, γ) en varios subgrafos (N_1, γ_1), $(N_2, \gamma_2), \ldots$, de modo que el valor de Myerson de la situación de comunicación original pueda calcularse fácilmente a partir de los valores de Myerson de las situaciones de comunicación que resulten de esta división. Se discutirá también qué condiciones del grafo (N, γ) y del juego v hacen factible y útil una descomposición de este tipo, y se presentarán algunos resultados relativos a un tipo particular de juegos, los juegos de representación, que forman una base del espacio vectorial G^N.

Comencemos por definir estos juegos.

2.4.1. Preliminares: juegos de representación

Dado un juego coalicional $v \in G^N$, el *juego dual* de v, que notaremos v^*, es también un juego de G^N que se define: $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$ para cada $S \subset N$. Como $v(S)$ representa la parte de $v(N)$, el pago a la gran coalición, que la coalición S puede reclamar para sí misma, $v^*(S)$ representará la parte de $v(N)$ que la coalición complementaria de S, $N \setminus S$, no puede reclamar. Si el juego v es superaditivo, es obvio que será $v(S) \leq v^*(S)$ para toda coalición $S \subset N$, y parece natural entender $v(S)$ y $v^*(S)$ como las cantidades mínima y máxima respectivamente que la coalición S podría reclamar para sí misma.

Como la transformación que a cada juego $v \in G^N$ le hace corresponder su dual v^* es una biyección, el conjunto $\{u_S^*\}_{\emptyset \neq S \subset N}$ de los juegos duales de los de la base de unanimidad es una base de G^N. Nótese que:

$$u_S^*(T) = \begin{cases} 1, & \text{para todo } T \subset N \text{ con } T \cap S \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que, dada una coalición $S \subset N$, es $u_S^*(T) = 1$ si y sólo si existe algún elemento de S en la coalición T (es decir, si la coalición S tienen al menos un representante en T), al juego u_S^* se le ha llamado el *juego de representación* de la coalición S [4]. El juego $-u_S^*$ se suele interpretar como un juego de coste, donde $u_S^*(T)$ sería el coste en el que incurre la coalición T. La presencia de al menos un jugador de S en T conllevaría un coste unitario para la coalición T.

Siguiendo a Owen (1986), para cada $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$, llamaremos al juego $p_S = -u_S^*$ el *juego de los gastos generales* (o de los gastos indirectos) sobre S. Obviamente, la familia $\{p_S\}_{\emptyset \neq S \subset N}$ es también una base de G^N.

2.4.2. Dividiendo los grafos

Como se apuntó antes, proponemos aquí, con el fin de simplificar el cálculo del valor de Myerson de una situación de comunicación (N, v, γ), y para determinados juegos v, considerar la posibilidad de dividir el grafo (N, γ) en dos subgrafos $(N_1, \gamma|_{N_1})$ y $(N_2, \gamma|_{N_2})$, de modo que el valor de Myerson de la situación de comunicación (N, v, γ) pueda calcularse a partir de los valores de Myerson de las situaciones de comunicación $(N_1, v|_{N_1}, \gamma|_{N_1})$ y $(N_2, v|_{N_2}, \gamma|_{N_2})$. En esta subsección, exploraremos ciertas condiciones del juego v y el grafo γ que hacen factible la descomposición.

Consideremos en primer lugar situaciones de comunicación del tipo (N, p_N, γ) en las que p_N es el juego de los gastos generales (sobre N) definido en los preliminares de esta sección y el grafo (N, γ) puede dividirse en dos subgrafos de un modo determinado. En la demostración de la proposición siguiente se utilizará el hecho obvio de que, por definición de los juegos p_S, para todo $T \subset N$, es $p_N|_T = p_T$.

[4]Ver, por ejemplo, Weber (1994), o Kalai y Samet (1988), que, en un trabajo sobre el Valor de Shapley ponderado, dedican un apartado al concepto de dualidad en juegos.

Proposición 2.2 *Sea* (N, p_N, γ) *una situación de comunicación y sean* N_1 *y* N_2 *dos subconjuntos no vacíos de* N *tales que:* $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $\gamma|_{N_1 \cap N_2}$ *es el grafo completo* $K_{N_1 \cap N_2}$ *y* $\gamma|_{N_1} \cup \gamma|_{N_2} = \gamma$. *Entonces:*

- *si* $i \in N_1 \setminus N_2$, $\mu_i(N, p_N, \gamma) = \mu_i(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1})$,
- *si* $i \in N_2 \setminus N_1$, $\mu_i(N, p_N, \gamma) = \mu_i(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2})$, *y*
- *si* $i \in N_1 \cap N_2$,

$$\mu_i(N, p_N, \gamma) = \mu_i(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) + \mu_i(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) - \mu_i(N_1 \cap N_2, p_{N_1 \cap N_2}, \gamma|_{N_1 \cap N_2}).$$

Demostración: En las condiciones del enunciado, el juego restringido al grafo puede escribirse:

$$p_N^\gamma = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_{p_N}(S)\ u_S^\gamma =$$

$$= \sum_{\emptyset \neq S \subset N_1} \Delta_{p_N}(S)\ u_S^\gamma + \sum_{\emptyset \neq S \subset N_2} \Delta_{p_N}(S)\ u_S^\gamma - \sum_{\emptyset \neq S \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S)\ u_S^\gamma +$$

$$+ \sum_{\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2} \ \sum_{\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1} \ \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S_1 \cup S_2 \cup K)\ u^\gamma_{S_1 \cup S_2 \cup K}. \tag{2.17}$$

Veamos que el último sumatorio en el tercer miembro de la anterior cadena de igualdades es nulo. Dados dos conjuntos S_1 y S_2, con $\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2$ y $\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1$, notemos $S^{12} = S_1 \cup S_2$, y sea $\{R_i\}_{i=1}^{r(S^{12})} = \texttt{CS}(N, \gamma, S^{12})$ la familia de todos los conjuntos de conexión (de nodos) de S^{12} en (N, γ), minimales o no. Entonces, por ser $\gamma|_{N_1 \cap N_2}$ un grafo completo, si $K \subset N_1 \cap N_2$, la clase $\{R_i \cup K\}_{i=1}^{r(S^{12})}$ será una familia de conjuntos de conexión de S^{12} y de $S^{12} \cup K$ en (N, γ), que puede tener elementos repetidos, y que contiene a $\texttt{CS}(N, \gamma, S^{12} \cup K)$. Por tanto, utilizando las igualdades (2.5) y (2.6) en la Sección 2.2:

$$\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u^\gamma_{S^{12} \cup K} =$$

$$= \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \sum_{i=1}^{r(S^{12})} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{R_i \cup K} - \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \sum_{i<j} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{R_i \cup R_j \cup K} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{r(S^{12})+1} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{\cup_{i=1}^{r(S^{12})}(R_i \cup K)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r(S^{12})} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{R_i \cup K} - \sum_{i<j} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{R_i \cup R_j \cup K} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{r(S^{12})+1} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{\cup_{i=1}^{r(S^{12})}(R_i \cup K)}.$$

Así, para alcanzar nuestro objetivo, necesitamos probar que, para cualesquiera $R_{l_1}, \ldots, R_{l_t}$ con $1 \leq l_1 < \ldots < l_t \leq r(S^{12})$, es:

$$\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{(\cup_{j=1}^{t} R_{l_j}) \cup K} = \mathbf{0}.$$

Nótese que dados R_i y $R_j \in \mathtt{CS}(N, \gamma, S^{12})$, $R_i \cup R_j$ es también un elemento de $\mathtt{CS}(N, \gamma, S^{12})$. Por tanto, es suficiente con probar que, para todo $R \in \mathtt{CS}(N, \gamma, S^{12})$, se satisface:

$$\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{R \cup K}(T) = 0 \quad \textit{para todo} \ \ T \subset N. \tag{2.18}$$

Si $T \subset N$ y $R \not\subset T$, entonces (2.18) se satisface por la definición de los juegos de unanimidad. Por otra parte, si $R \subset T$, entonces $u_{R \cup K}(T) = 1$ si y sólo si $K \subset T$. Y, en consecuencia:

$$\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)\ u_{R \cup K}(T) = \sum_{K \subset N_1 \cap N_2 \cap T} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) =$$

$$= \sum_{K \subset N_1 \cap N_2 \cap T} (-1)^{s^{12}+k} = (-1)^{s^{12}} \sum_{k=0}^{|N_1 \cap N_2 \cap T|} \begin{pmatrix} |N_1 \cap N_2 \cap T| \\ k \end{pmatrix} (-1)^k = 0.$$

Por tanto, la cadena de igualdades en (2.17) se transforma en:

$$p_N^\gamma = p_{N_1}^\gamma + p_{N_2}^\gamma - p_{N_1 \cap N_2}^\gamma,$$

con lo que, teniendo en cuenta la linealidad del valor de Shapley, el resultado queda probado. □

Ejemplo 2.6 *Consideremos de nuevo la situación de comunicación del Ejemplo 2.2, en el que llamábamos v al juego de los gastos generales sobre N, que ahora estamos notando p_N. Calcularemos el valor de Myerson de (N, v, γ) utilizando la proposición previa. Podemos dividir el grafo (N, γ) (Fig. 2.2) en tres grafos $(N_1, \gamma|_{N_1})$, $(N_2, \gamma|_{N_2})$ y $(N_3, \gamma|_{N_3})$, con $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{2, 3, 4\}$ y $N_3 = \{2, 4, 5\}$. Una representación de estos tres grafos aparece en la Figura 2.4.*

Figura 2.4: División del grafo (N, γ) del Ejemplo 2.6

Por las propiedades de simetría y eficiencia del valor de Myerson, tenemos que:

$$\mu(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \mu(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \text{ y}$$

$$\mu(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3}) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

En consecuencia, y aplicando dos veces la Proposición 2.2, primero a N_1 y $N_2 \cup N_3$, y luego a N_2 y N_3:

$$\mu_1(N, p_N, \gamma) = \mu_1(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) = -\frac{1}{2},$$

$$\mu_2(N, p_N, \gamma) = \mu_2(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) + \mu_2(N_2 \cup N_3, p_{N_2 \cup N_3}, \gamma|_{N_2 \cup N_3}) -$$

$$-\mu_2(N_1 \cap (N_2 \cup N_3), p_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}, \gamma|_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}) =$$

$$= \mu_2(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) + \mu_2(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) + \mu_2(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3}) -$$

$$-\mu_2(N_2 \cap N_3, p_{N_2 \cap N_3}, \gamma|_{N_2 \cap N_3}) - \mu_2(N_1 \cap (N_2 \cup N_3), p_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}, \gamma|_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{1}{3}$$

$$\mu_3(N, p_N, \gamma) = \mu_3(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) = -\tfrac{1}{3} = \mu_5(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3}) = \mu_5(N, p_N, \gamma), \text{ y}$$

$$\mu_4(N, p_N, \gamma) = \mu_4(N_2 \cup N_3, p_{N_2 \cup N_3}, \gamma|_{N_2 \cup N_3}) = \mu_4(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) + \mu_4(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3}) -$$

$$-\mu_4(N_2 \cup N_3, p_{N_2 \cup N_3}, \gamma|_{N_2 \cup N_3}) = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6},$$

como resultaba en el Ejemplo 2.2, pero habiendo reducido sustancialmente la cantidad de cálculos.

Parece natural intentar extender la validez de la anterior proposición a situaciones de comunicación en las que v sea un juego más general. Veremos a continuación que el resultado es válido para ciertos juegos de la familia $\{p_T\}_{\emptyset \neq T \subset N}$, definidos en los preliminares de esta sección del modo:

$$p_T(S) = -u_T^*(S) = \begin{cases} -1, & \text{si } S \cap T \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } S \cap T = \emptyset. \end{cases}$$

Proposición 2.3 *Sean $T \subset N$, (N, p_T, γ) una situación de comunicación y N_1 y N_2 dos subconjuntos no vacíos de N tales que: $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $\gamma|_{N_1 \cap N_2}$ es el grafo completo $K_{N_1 \cap N_2}$ y $\gamma|_{N_1} \cup \gamma|_{N_2} = \gamma$. Si $T \subset N_1 \cap N_2$ ó $N_1 \cap N_2 \subset T$, entonces se satisfacen (i), (ii) y (iii) en la Proposición 2.2 (sustituyendo p_N por p_T, obviamente).*

Demostración: Los coeficientes de unanimidad del juego p_T (ver, por ejemplo, Owen (1986)) son:

$$\Delta_{p_T}(S) = \begin{cases} (-1)^s, & \text{si } \emptyset \neq S \subset T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.19}$$

La demostración de la Proposición 2.2 se basaba en la constatación del hecho de que, para cada par de conjuntos S_1 y S_2, con $\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2$ y $\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1$, si notamos $S^{12} = S_1 \cup S_2$, y para todo conjunto de conexión $R \in \texttt{CS}(N, \gamma, S^{12})$, si tomamos $T = N$, el juego $\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_T}(S^{12} \cup K) u_{R \cup K}$ es el juego nulo.

Pero lo anterior es cierto también si $T \subset N_1 \cap N_2$ ya que, en este caso, $\Delta_{p_T}(S^{12} \cup K) = 0$ para todo $K \subset N_1 \cap N_2$ y para todos S_1 y S_2 en las condiciones del párrafo anterior.

Por otra parte, si $N_1 \cap N_2 \subset T$, tendremos, para todo $K \subset N_1 \cap N_2$:

$$\Delta_{p_T}(S^{12} \cup K) = \begin{cases} (-1)^{s^{12}+k}, & \text{si } S^{12} \subset T \quad (\text{ó } S^{12} \cup K \subset T), \\ 0, & \text{si } S^{12} \not\subset T \end{cases}$$

pues, obviamente, si $K \subset N_1 \cap N_2$ y $N_1 \cap N_2 \subset T$, ha de ser $K \subset T$.

Por tanto, si $S^{12} \not\subset T$, el resultado se sigue trivialmente. Pero, si $S^{12} \subset T$, como los coeficientes de unanimidad en la última igualdad son como los de p_N, el juego de los gastos generales sobre N, podemos utilizar los mismos argumentos de tipo combinatorio que en la demostración de la Proposición 2.2 para obtener el resultado. □

Si representamos por $\mathcal{SG}^N_{N_1 \cap N_2}$ el subespacio de G^N engendrado por los juegos p_T con

$T \subset N_1 \cap N_2$ ó $N_1 \cap N_2 \subset T$, es decir, si hacemos:

$$\mathcal{SG}^N_{N_1 \cap N_2} = \mathcal{L}\{\, p_T \in G^N \;/\; T \subset N_1 \cap N_2 \;\text{ ó }\; T \supset N_1 \cap N_2 \,\},$$

podemos extender aún el alcance de las dos proposiciones previas.

Proposición 2.4 *Sean (N, v, γ) una situación de comunicación y N_1 y N_2 dos subconjuntos no vacíos de N tales que: $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $\gamma|_{N_1 \cap N_2}$ es el grafo completo $K_{N_1 \cap N_2}$ y $\gamma|_{N_1} \cup \gamma|_{N_2} = \gamma$. Entonces, si $v \in \mathcal{SG}^N_{N_1 \cap N_2}$, se satisfacen (i), (ii) y (iii) en la Proposición 2.2 (sustituyendo en esta ocasión p_N por v).*

Demostración: Es consecuencia directa de la Proposición 2.3 y de la linealidad del valor de Shapley. □

Ejemplo 2.7 *En el Ejemplo 2.6, el subespacio de los juegos que satisfacen la Proposición 2.4 es el engendrado por los juegos p_T con $T \supset N_i \cap N_j$, para todos i y j con $i < j$ ó $T \subset N_i \cap N_j$, para todos i y j con $i < j$.*

Como $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{2, 3, 4\}$ y $N_3 = \{2, 4, 5\}$, se tratará del subespacio:

$$\mathcal{L}\left\{p_{\{2\}}, p_{\{2,4\}}, p_{\{1,2,4\}}, p_{\{2,3,4\}}, p_{\{2,4,5\}}, p_{\{1,2,3,4\}}, p_{\{1,2,4,5\}}, p_{\{2,3,4,5\}}, p_{\{1,2,3,4,5\}}\right\}.$$

Obviamente, cuanto más se divida el grafo (N, γ), menor será la dimensión del subespacio de G^N formado por los juegos para los que la Proposición 2.4 es válida. Si consideráramos una nueva división (menos fina) del grafo, con $N_1 = \{1, 2\}$ y $N_4 = N_2 \cup N_3 = \{2, 3, 4, 5\}$, el subespacio en cuestión sería:

$$\mathcal{SG}^{\{1,2,3,4,5\}}_{\{1,2\}\cap\{2,3,4,5\}} = \mathcal{SG}^{\{1,2,3,4,5\}}_{\{2\}} = \mathcal{L}\left\{\, p_{\{2\}\cup T} \;/\; T \subset \{1, 3, 4, 5\}\right\},$$

del que, como resulta evidente, el anterior es un subespacio propio.

Por otra parte, es fácil ver que los resultados previos se sostienen si, en lugar de en el cálculo del valor de Shapley, estuviéramos interesados en el del valor de Banzhaf-Coleman o, en general, de cualquier otro semivalor del juego restringido al grafo v^γ. La linealidad de los semivalores es suficiente para garantizarlo.

Capítulo 3

Juegos y grafos probabilísticos

3.1. Introducción

La aproximación clásica de Myerson al estudio de las interacciones entre jugadores presentada en los capítulos anteriores es obviamente más rica que la basada sólo en juegos cooperativos y resulta útil en una gran variedad de situaciones. A pesar de ello, en muchas otras situaciones reales, considerar la estructura de la red como algo fijo y dado puede resultar una suposición muy restrictiva. En ciertos casos, parecería razonable tener en cuenta en el modelo no sólo una red, sino varias estructuras de comunicación alternativas. En este capítulo, supondremos que son verosímiles diferentes redes. La regla de reparto asociada al modelo que vamos a presentar dependerá de forma natural de estas diversas redes. Los antecedentes más relevantes en la literatura con planteamientos relacionados con los aquí expuestos son :

- Calvo et al. (1999), que generalizan el modelo de Myerson extendiéndolo a un contexto probabilístico en el que se consideran todas las posibles redes entre los jugadores. Al calcular la probabilidad de cada una de estas redes, suponen que, para cada par de jugadores, existe una cierta probabilidad de comunicación directa entre ellos. Además, consideran que estas probabilidades son independientes entre sí. Dado un juego TU con restricciones a la comunicación establecidas en este contexto probabilístico, definen y caracterizan una regla de reparto apropiada, y prueban que es una extensión natural del valor de Myerson.

- Jackson (2005a), que parte también de la posibilidad de redes alternativas, pero no asume un esquema probabilístico para tal diversidad, sino que supone que esta sería consecuencia de los cambios que pueden establecer los jugadores en sus relaciones bilaterales. Sostiene que tal posibilidad debería influir en el reparto de valor entre los jugadores y, partiendo de esta idea, propone una familia de reglas de reparto, que incluye el valor de Myerson como un caso particular.

El modelo que se propone en este capítulo, como el de Calvo et al. (1999), se centra en las diferentes redes posibles y su verosimilitud como unidad de estudio, pero, a diferencia de este, no hace uso de la hipótesis de independencia.

La eliminación de esta hipótesis de independencia en las relaciones bilaterales no es en absoluto irrelevante. Por ejemplo, no parece razonable suponer independencia en multitud de redes de diversos tipos: sociales (redes de relaciones de amistad entre individuos, o de relaciones comerciales entre compañías), de información (la red de citas entre trabajos académicos, o la World Wide Web), tecnológicas (redes de distribución de algún bien o recurso, como la electricidad o redes de ferrocarril o de rutas aéreas) o biológicas (redes de rutas metabólicas, o redes neuronales). Para más detalles, puede verse Newman (2003).

Por otro lado, un par de características que parecen ser comunes a redes de muy diferentes tipos y que sugieren una clara dependencia en las relaciones son:

- **Transitividad.** En algunas redes se encuentra que, si el nodo 1 está conectado directamente con el nodo 2 y éste a su vez lo está con el nodo 3, entonces existe una mayor probabilidad de que el nodo 1 esté también conectado con el 3. En lenguaje coloquial: los amigos de mis amigos son (probablemente) también mis amigos[1].

[1]FOAF (un acrónimo de Friend of a Friend) es un programa que permite a grupos de personas describir redes sociales sin necesidad de una base de datos centralizada.

- **Incompatibilidades.** En muchas redes sociales o económicas la existencia de una conexión entre dos personas, empresas o, por ejemplo, partidos políticos, excluye automáticamente o, al menos, hace muy poco verosímil la relación entre uno de ellos y un tercer actor.

Sirva el siguiente ejemplo para ilustrar lo inadecuado de esta hipótesis de independencia en ciertos casos. Supongamos la existencia de dos países, R y G, sin frontera común, el primero productor y exportador de gas natural y el segundo consumidor e importador de este combustible, que se están planteando la construcción de un gasoducto para transportar el gas de R a G. Imaginemos también que se consideran dos rutas posibles para esta conexión. La primera es una ruta directa de R a G bajo el mar. La otra atraviesa un tercer país, P, que tiene frontera terrestre tanto con R como con G. Tendríamos así dos redes alternativas: RG y RPG. La construcción del gasoducto por la ruta (submarina) directa RG es, aunque más corta, considerablemente más cara, pero evita a R y a G depender de un intermediario P, que se convertiría, si se decidiera utilizar la ruta RPG, en lo que en teoría de juegos se llama un jugador con poder de veto. Independientemente de las probabilidades que, a priori, asignemos a cada una de las dos redes posibles, éstas no pueden obtenerse de las correspondientes a cada una de las aristas RG, RP y PG haciendo uso de la hipótesis de independencia.

En este capítulo consideraremos el contexto común a todo el trabajo, en el que los jugadores en un juego cooperativo tienen restringidas sus posibilidades de cooperación o de comunicación. Pero, a diferencia de lo que hacíamos en el capítulo anterior, supondremos aquí que estas restricciones se reflejan en un conjunto de redes distintas. Formalmente, los diferentes grafos con conjunto de nodos el conjunto de jugadores son los valores de una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad nos informa sobre la verosimilitud de las posibles redes alternativas. Así, la red no es fija como en Myerson (1977), ni se obtiene necesariamente de las probabilidades de las diferentes aristas utilizando la hipótesis de independencia como en Calvo et al. (1999). De hecho, en el marco del modelo propuesto, el de Myerson puede contemplarse como el caso particular correspondiente a una distribución de probabilidad degenerada, en el que sólo una red es posible, y la aproximación probabilística de Calvo et al. (1999), como el caso particular en el que sólo se permiten ciertas distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de redes posibles: aquellas en las que la probabilidad de cada red se obtiene a partir de la de sus diferentes aristas, vía la hipótesis de independencia.

En este nuevo contexto, definimos una regla de reparto que es una generalización del valor de Myerson, y probamos que puede caracterizarse axiomáticamente en términos de propiedades que son, a su vez, la extensión natural de aquellas que nos permiten caracterizar el valor de Myerson: eficiencia en componentes y, o bien equidad, o bien contribuciones equilibradas.

Lo que resta del capítulo se organiza como sigue: La Sección 2 se dedica a una revisión más detallada del trabajo de Calvo et al. (1999) sobre juegos con grafos probabilísticos anteriormente citado; en la Sección 3, se propone un nuevo modelo, que llamaremos de las *situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas*, junto con un valor que, como en el caso del valor de Myerson, se define como el valor de Shapley de un cierto juego inducido (por el grafo probabilístico generalizado, en este caso); a continuación, en la Sección 4, se exploran algunas de las propiedades de este juego restringido o inducido, mientras que, en la 5, se dan dos caracterizaciones del valor definido previamente, y se concluye con algunas breves observaciones, que se presentan en la Sección 6.

3.2. Juegos con grafos probabilísticos

En el modelo de Myerson, cada par de jugadores está unido por una arista en el grafo si y sólo si pueden comunicarse directamente, sin necesidad de recurrir a uno o varios intermediarios. En este sentido, el modelo es determinista. Como ya se ha mencionado en la introducción, Calvo et al. (1999) generalizan dicho modelo para cubrir el caso en que un enfoque probabilístico pudiera resultar más adecuado para modelar la cooperación. En esta sección haremos un breve resumen de su modelo probabilístico.

Argumentan los autores que, en general, no ocurrirá que, o bien dos jugadores son capaces de comunicarse y, por tanto, de cooperar, o bien son absolutamente incapaces de hacerlo, sino que más bien serán capaces de cooperar en una determinada medida. Consideran así un contexto más general en el que cada par de jugadores tiene una cierta probabilidad de comunicarse directamente. Definen un *grafo probabilístico* como un par $(N, \hat{p})$, siendo $\hat{p}$ una función que asigna a cada arista $\{i, j\}$ de K_N una probabilidad $\hat{p}(\{i, j\})$. Suponen además que estas probabilidades son independientes [2]. A una terna $(N, v, \hat{p})$ le llaman un *juego con un grafo probabilístico.* Slikker y van den Nouweland (2001) le darán más tarde a la misma estructura el nombre de *situación de comunicación probabilística.*

Una tal función $\hat{p}$ y la suposición de independencia inducen una función de probabilidad p definida en Γ^N, el conjunto de todos los grafos con conjunto de nodos N, del modo siguiente:

$$p(\gamma) = \prod_{\{i,j\} \in \gamma} \hat{p}(\{i, j\}) \prod_{\{i,j\} \notin \gamma} (1 - \hat{p}(\{i, j\}))\,, \quad para \;\; todo \;\; \gamma \in \Gamma^N.$$

A partir de este punto, definen un juego restringido al grafo probabilístico (juego inducido), y el valor de Myerson del juego con el grafo probabilístico como el valor de Shapley del juego inducido. Prueban que el valor así definido es una extensión del propuesto por Myerson para el caso determinista, y obtienen una caracterización axiomática del mismo en términos de dos de sus propiedades: eficiencia en componentes y equidad. Señalan luego que esta última propiedad puede sustituirse en la caracterización por la de contribuciones equilibradas, y terminan probando que dicho valor satisface también estabilidad.

[2] Lo que los autores llaman en el trabajo citado grafo probabilístico es en realidad una generalización del modelo que Solomonoff y Rapoport (1951) e, independientemente, Erdös y Rényi (1959) llamaron *grafo aleatorio.* En él, cada una de las posibles aristas $\{i, j\}$ está presente en el grafo con una probabilidad p fija e igual para todas ellas. Esto, junto con la hipótesis de independencia, hace que a cada grafo con m aristas se le asigne una probabilidad $p^m(1-p)^{M-m}$, donde $M = \frac{n(n-1)}{2}$ es el máximo número de aristas posible en un grafo con n nodos. Como consecuencia de las hipótesis, el grado de cada uno de los nodos del grafo es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n-1$ y p, que convergerá, al crecer n, a una distribución de Poisson. Por este motivo, el modelo se conoce también como *grafo aleatorio de Poisson.* Existen en la literatura diversos modelos alternativos como, por ejemplo, los *grafos aleatorios exponenciales* o los *grafos de Markov.* En Newman (2003) puede encontrarse una completa revisión de la literatura sobre este tópico.

3.3. El modelo: Situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas

Dado $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, consideraremos una función de probabilidad arbitraria p definida en Γ^N, la familia de todos los grafos con conjunto de nodos N. Para cada grafo $\gamma \in \Gamma^N$, $p(\gamma)$ representa la probabilidad de que las aristas entre los nodos de N sean precisamente las de γ. Obviamente, p deberá satisfacer:

$$p(\gamma) \geq 0 \;\; \text{para todo} \;\; \gamma \in \Gamma^N, \quad \text{y} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma) = 1.$$

Para cada p fijo, llamaremos *soporte de p* y notaremos $\mathcal{S}_p$ al conjunto de aquellos grafos $\gamma \in \Gamma^N$ tales que $p(\gamma) > 0$.

En adelante, llamaremos a cada par (N, p) *grafo probabilístico generalizado*, y notaremos $\mathcal{P}^N$ el conjunto de todos los grafos probabilísticos generalizados con conjunto de nodos N.

La noción de conexión en grafos deterministas puede extenderse a los grafos probabilísticos generalizados del modo siguiente: dos nodos i y j estarán *directamente conectados* en $(N, p) \in \mathcal{P}^N$ si existe $\gamma \in \mathcal{S}_p$ tal que $\{i, j\} \in \gamma$, es decir, si están directamente conectados en algún grafo del soporte de p. Diremos que i y j están *conectados* en (N, p) si existe una sucesión $\{i_1 = i, i_2, \ldots, i_r = j\}$ de nodos de N tal que, para todo $k = 1, \ldots, r-1$, i_k e i_{k+1} están directamente conectados en (N, p).

La relación "estar conectado con" en un grafo probabilístico generalizado (N, p) es de equivalencia en N, el conjunto de nodos, e induce por tanto una partición del mismo en *componentes conexas probabilísticas*. Notaremos N/p dicha partición. Dos nodos i y j $(i \neq j)$ estarán en la misma componente conexa (probabilística) si están conectados en (N, p). Nótese que $N/p = N/\gamma_p$, siendo γ_p el grafo determinista $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{S}_p} \gamma$.

Obsérvese también que dos nodos pueden estar en la misma componente conexa probabilística en (N, p) aunque no exista ningún grafo determinista (N, γ) en $\mathcal{S}_p$ en el que dichos nodos estén conectados. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 3.1 *Sean:* $N = \{1,2,3,4\}$, $\gamma_1 = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$, $\gamma_2 = \{\{3,4\}\}$ *y* $p(\gamma_k) = \frac{1}{2}$ *para* $k = 1$ *ó* 2*. Entonces,* $\gamma_p = \gamma_1 \bigcup \gamma_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$ *y* $N/p = N/\gamma_p = \{N\}$*.*

Dado el grafo $(N,\gamma) \in \Gamma^N$, notaremos (N, p^γ) el *grafo probabilístico generalizado asociado*, en el que p^γ es la función de probabilidad definida en Γ^N y degenerada en γ, con $p^\gamma(\gamma) = 1$. La aplicación que a cada grafo (N,γ) le hace corresponder el grafo probabilístico generalizado (N, p^γ) es una biyección entre Γ^N y su conjunto imagen en $\mathcal{P}^N$. En este sentido, Γ^N es un subconjunto de $\mathcal{P}^N$, y cada grafo (determinista) puede identificarse con un grafo probabilístico generalizado particular.

Cada grafo probabilístico generalizado (N,p) induce $2^{\binom{n}{2}}$ *subgrafos probabilísticos generalizados* $(N, p_\xi) \in \mathcal{P}^N$, uno por cada $\xi \in \Gamma^N$, donde:

$$p_\xi(\gamma) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\eta \subset K_N \setminus \xi} p(\gamma \cup \eta), & \text{si } \gamma \subset \xi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un subgrafo probabilístico generalizado (N, p_ξ) puede interpretarse como sigue: dados $(N,p) \in \mathcal{P}^N$ y $\xi \in \Gamma^N$, p_ξ asignará, a cada uno de los subgrafos deterministas γ de ξ, una probabilidad $p_\xi(\gamma)$, que se calculará como la suma de las probabilidades que p asigna a aquellos grafos de Γ^N que tienen en común con ξ las aristas de γ. Así:

$$p_\xi(\gamma) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\eta \in \Gamma^N,\ \eta \cap \xi = \gamma} p(\eta), & \text{si } \gamma \subset \xi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con la definición anterior, es fácil ver que, para todo $(N,p) \in \mathcal{P}^N$, $p_\emptyset$ es la distribución degenerada $p^\emptyset$, y $p_{K_N} = p$. En particular, dados N, $i \in N$ y $(N, p_\xi) \in \mathcal{P}^N$, notaremos $(N, p_{-\xi})$ y (N, p_{-i}) respectivamente los subgrafos probabilísticos $(N, p_{K_N \setminus \xi})$ y $(N, p_{K_{N \setminus \{i\}}})$.

Definición 3.1 *Una situación de comunicación probabilística generalizada es una terna* (N,v,p)*, donde* (N,v) *es un juego de* G^N *y* (N,p) *un grafo (probabilístico generalizado) de* $\mathcal{P}^N$*.*

Observación 3.1 *Nótese que dos casos especiales de la definición anterior son:*

- *Situaciones de comunicación deterministas. Una situación de comunicación (determinista) (N, v, γ) puede considerarse como una situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) particular; aquella en la que $p = p^\gamma$.*

- *Situaciones de comunicación probabilísticas (como se definen en Calvo et al. (1999)). Una situación de comunicación probabilística $(N, v, \hat{p})$ puede también considerarse como una situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) particular, definiendo:*

$$p(\gamma) = \prod_{l \in \gamma} \hat{p}(l) \prod_{l \notin \gamma} (1 - \hat{p}(l)) \,, \qquad \textit{para todo } \gamma \in \Gamma^N,$$

  como ya se mencionó en la sección anterior.

Llamaremos $\mathcal{GPCS}^N$ a la clase de todas las situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas con conjunto de jugadores N, y sea $\mathcal{GPCS}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{GPCS}^N$.

El juego restringido al grafo probabilístico generalizado

Como en el caso determinista, podemos asociar a cada situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) un nuevo juego (N, v^p), que llamaremos *juego inducido o restringido al grafo* (probabilístico generalizado), y donde $v^p(S)$ representará (el valor esperado de) las posibilidades económicas de la coalición S, dadas las restricciones en la comunicación impuestas por el grafo probabilístico generalizado (N, p). Es decir:

$$v^p(S) = \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma) v^\gamma(S) = \sum_{\gamma \subset K_S} p_{K_S}(\gamma) v^\gamma(S), \quad \textit{para todo } S \subset N. \tag{3.1}$$

Una *regla de reparto* definida en una clase $\mathcal{GPCS} \subset \mathcal{GPCS}^\infty$ de situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas es simplemente una función Ψ que asigna un vector de pagos $\Psi(N, v, p) \in I\!R^n$ a cada situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) en la clase $\mathcal{GPCS}$.

El valor de Myerson probabilístico

Llamaremos *valor de Myerson probabilístico* a la regla de reparto para situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas que resulta de la extensión natural del valor de Myerson a este tipo más general de situaciones de comunicación.

Definición 3.2 *Sea* (N, v, p) *una situación de comunicación probabilística generalizada. El valor de Myerson probabilístico de* (N, v, p) *se define:*

$$\mu(N, v, p) = Sh(N, v^p).$$

La siguiente proposición, cuya prueba es trivial y, por tanto, se omite, relaciona el valor de Myerson que acabamos de definir para una situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) con los de cada una de las situaciones de comunicación (deterministas) (N, v, γ), con $\gamma \in \mathcal{S}_p$.

Proposición 3.1 *Dada* (N, v, p) *una situación de comunicación probabilística generalizada, se tiene:*

$$\mu(N, v, p) = \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma)\ \mu(N, v, \gamma) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma)\ \mu(N, v, \gamma).$$

Para ilustrar y motivar esta aproximación, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2 *En el parlamento de cierto país están representados cuatro partidos:* $1, 2, 3$ *y* 4*, cuyos porcentajes de escaños son del* 25*,* 30*,* 30 *y* $15\,\%$ *respectivamente. Ciertos tipos de leyes requieren, para ser aprobadas, el voto favorable de al menos* $2/3$ *de los parlamentarios.*

Supongamos que los partidos $1, 2, 3$ *y* 4 *se alinean, en el espectro ideológico izquierda-derecha, o liberal-conservador, como en la Figura 3.1 y, por otro lado, que los parlamentarios de cada partido votan en bloque.*

Los partidos 2 *y* 3 *forman una coalición que gobierna con una mayoría suficiente en la mayor parte de los casos y que, cuando quiere hacer aprobar leyes especiales del tipo antes aludido, intenta alcanzar acuerdos ad hoc con los partidos extremos en el espectro político. Debido a las incompatibilidades ideológicas entre los partidos* 1 *y* 4*, estos acuerdos se* *alcanzan en algunas ocasiones con el partido* 1*, y en otras con el partido* 4*, pero nunca con ambos simultáneamente.*

Se estima que las frecuencias relativas de los acuerdos mencionados (grafos γ_1 *y* γ_2 *en las Figs. 3.2 y 3.3) son de* 0,6 *y* 0,3 *respectivamente. Y que, con probabilidad* 0,1*, los partidos* 2 *y* 3 *no pueden obtener ninguna colaboración de los restantes, como en el grafo* γ_3 *en la Fig. 3.4.*

En este caso, la situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) *vendrá dada por:* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $v(S) = 1$ *si* $s \geq 3$ *y 0 en otro caso, y* $p(\gamma_1) = 0{,}6$*,* $p(\gamma_2) = 0{,}3$ *y* $p(\gamma_3) = 0{,}1$*. Por tanto, el correspondiente valor de Myerson (probabilístico) será:*

$$\mu(N, v, p) = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \frac{3}{10}\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right).$$

Figura 3.1: Espectro político liberal-conservador

Figura 3.2: Grafo $\gamma_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

Figura 3.3: Grafo $\gamma_2 = \{\{2, 3\}, \{3, 4\}\}$

Figura 3.4: Grafo $\gamma_3 = \{\{2, 3\}\}$

3.4. Algunas propiedades del juego inducido

En este apartado estudiaremos cómo las restricciones en la comunicación impuestas por un grafo probabilístico generalizado afectan a algunas de las principales propiedades de los juegos en forma de función característica. En otros términos, veremos en qué medida, dado un juego (N, v) y un grafo probabilístico generalizado (N, p), determinadas propiedades del juego v se heredan por el juego restringido v^p. La estructura y muchas de las ideas de lo que sigue se han tomado de Slikker y van den Nouweland (2001, pp. 53-81), que analizan con detalle el caso determinista.

3.4.1. Superaditividad

El primer resultado prueba que, para todo grafo probabilístico (N, p), la superaditividad del juego (N, v) es heredada por el juego restringido (N, v^p).

Proposición 3.2 *Sean (N, p) un grafo en $\mathcal{P}^N$ y (N, v) un juego en G^N. Entonces, si el juego (N, v) es superaditivo, el juego (N, v^p) lo será también.*

Demostración: Owen (1986) probó el resultado equivalente en el caso determinista. Es decir, que, para para cualquier grafo $\gamma \in \Gamma^N$, el juego restringido (N, v^γ) hereda la superaditividad del juego (N, v). Puesto que, por la definición en (3.1), v^p es una combinación lineal convexa con coeficientes $p(\gamma)$ de los juegos v^γ con $\gamma \in \mathcal{S}_p$, y teniendo en cuenta que cualquier combinación lineal con coeficientes no negativos de juegos superaditivos es obviamente un juego superaditivo, el juego v^p será también superaditivo. □

3.4.2. Convexidad

A diferencia de lo que ocurre con la superaditividad, veremos que es necesario imponer ciertas condiciones al grafo probabilístico generalizado para poder asegurar que la convexidad del juego (N, v) es heredada por el juego restringido (N, v^p).

Proposición 3.3 *Sea* $(N, p) \in \mathcal{P}^N$ *y tal que, para todo* $\gamma \in \mathcal{S}_p$, γ *es un grafo ciclo-completo. Entonces, si* (N, v) *es un juego convexo,* (N, v^p) *también lo es.*

Demostración: Van den Nouweland y Borm (1991) probaron que, para todo grafo ciclo-completo (N, γ) y para todo juego convexo (N, v), el juego restringido al grafo (N, v^γ) es también convexo. En nuestro contexto, y por hipótesis, (N, v) es un juego convexo y, para todo $\gamma \in \mathcal{S}_p$, γ es ciclo-completo. Por tanto, podemos asegurar que v^p es una combinación lineal convexa de juegos convexos v^γ y, en consecuencia, es también convexo. □

Proposición 3.4 *Sea* $(N, p) \in \mathcal{P}^N$ *tal que existe al menos un grafo* $\gamma \in \mathcal{S}_p$ *que no es ciclo-completo. Entonces, si* $p(\gamma)$ *es suficientemente grande, existe al menos un juego convexo* (N, v) *tal que el juego restringido* (N, v^p) *es no convexo.*

Demostración: De nuevo en van den Nouweland y Borm (1991) se prueba que para todo grafo que no es ciclo-completo existe al menos un juego convexo tal que el juego restringido al grafo en cuestión es no convexo. Los autores dan una demostración constructiva de este resultado, que adaptaremos a nuestro contexto.

Si $\gamma \in \mathcal{S}_p$ no es ciclo-completo, entonces existen un ciclo $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1)$ en γ y dos nodos x_i y x_j, con $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y tales que: $i < j - 1$, $\{x_i, x_j\} \notin \gamma$, y $\{x_m, x_j\} \in \gamma$ para todo $m \in \{i + 1, \ldots, j - 1\}$. Consideremos el juego convexo (N, v) con $v(S) = s - 1$ para todo $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$. Definamos $S = \{x_i, x_{i+1}, x_j\}$ y $T = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Nótese que S, T y $T \setminus \{x_{i+1}\}$ son conexos en γ, mientras que $S \setminus \{x_{i+1}\}$ no lo es, y que, por otra parte, para todos $R \subset N$ y $\delta \in \Gamma^N$ es $v^\delta(R) = r - |R/\delta|$. Se sigue que:

$$v^\gamma(S) - v^\gamma(S \setminus \{x_{i+1}\}) = v(\{x_i, x_{i+1}, x_j\}) - [v(\{x_i\}) + v(\{x_j\})] = 2 >$$

$$> 1 = v(T) - v(T \setminus \{x_{i+1}\}) = v^\gamma(T) - v^\gamma(T \setminus \{x_{i+1}\}).$$

Por tanto:

$$v^p(S) - v^p(S \setminus \{x_{i+1}\}) = p(\gamma)\, [v^\gamma(S) - v^\gamma(S \setminus \{x_{i+1}\})] +$$

$$+ \sum_{\eta \in \mathcal{S}_p,\ \eta \neq \gamma} p(\eta)\,[v^\eta(S) - v^\eta(S \setminus \{x_{i+1}\})] = 2p(\gamma) + \sum_{\eta \in \mathcal{S}_p,\ \eta \neq \gamma} p(\eta)\,[v^\eta(S) - v^\eta(S \setminus \{x_{i+1}\})],$$

y, de forma análoga:

$$v^p(T) - v^p(T \setminus \{x_{i+1}\}) = p(\gamma) + \sum_{\eta \in \mathcal{S}_p,\ \eta \neq \gamma} p(\eta)\,[v^\eta(T) - v^\eta(T \setminus \{x_{i+1}\})]\,.$$

Luego:

$$v^p(S) - v^p(S \setminus \{x_{i+1}\}) > v^p(T) - v^p(T \setminus \{x_{i+1}\}) \tag{3.2}$$

si y sólo si:

$$p(\gamma) > \sum_{\eta \in \mathcal{S}_p,\ \eta \neq \gamma} p(\eta)\,[v^\eta(T) - v^\eta(T \setminus \{x_{i+1}\}) - v^\eta(S) + v^\eta(S \setminus \{x_{i+1}\})] \tag{3.3}$$

Además, para todo $\eta \in \mathcal{S}_p,\ \eta \neq \gamma$:

$$v^\eta(T) - v^\eta(T \setminus \{x_{i+1}\}) - v^\eta(S) + v^\eta(S \setminus \{x_{i+1}\}) \leq\ v^\eta(T) \leq\ v(T) = |T| - 1 = k - 1,$$

y así, el miembro derecho de la desigualdad (3.3) estará acotado superiormente por:

$$\sum_{\eta \in \mathcal{S}_p,\ \eta \neq \gamma} p(\eta)(k-1) = [1 - p(\gamma)](k-1).$$

En consecuencia, una condición suficiente para que se satisfaga (3.2) es que:

$$p(\gamma) > [1 - p(\gamma)]\,(k-1), \quad \textit{ó, equivalentemente, que} \;\; p(\gamma) > \frac{k-1}{k}. \tag{3.4}$$

Puesto que $S \subset T$, si p satisface la desigualdad (3.4) y, por tanto, es tal que se satisface también (3.2), entonces v^p será un juego no convexo, lo que cierra la demostración. $\square$

3.4.3. Juegos equilibrados y totalmente equilibrados

Consideremos ahora la posibilidad de que las propiedades de equilibrio y equilibrio total se hereden al restringir el juego a un grafo probabilístico generalizado.

La siguiente proposición establece que una condición suficiente para garantizar que se herede la propiedad de ser un juego equilibrado es que todos los grafos no vacíos del soporte de p sean conexos.

Proposición 3.5 *Sea (N, p) un grafo en $\mathcal{P}^N$. Entonces, las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) para todo $\gamma \in \mathcal{S}_p$, γ es conexo o vacío.

(ii) para todo juego equilibrado (N, v), el juego (N, v^p) es también equilibrado.

Demostración: Supongamos en primer lugar que (i) es cierta. Slikker y van den Nouweland (2001, th. 3.2, p. 56) prueban que si γ es, o bien el grafo vacío o bien un grafo conexo en Γ^N, entonces, para todo juego equilibrado (N, v), el juego (N, v^γ) es también equilibrado.

Por otra parte, de la definición de juego equilibrado se sigue trivialmente que toda combinación lineal convexa de juegos equilibrados es también un juego equilibrado. De la hipótesis sobre $\mathcal{S}_p$ se tiene que, si (N, v) es equilibrado, el juego v^p será una combinación lineal convexa de juegos v^γ equilibrados y, por tanto, equilibrado.

Supongamos ahora que (i) no es cierta y veamos que, en ese caso, (ii) tampoco lo es. Sea:

$$\mathcal{D}_p = \{\gamma_h\}_{h=1,\dots,r} \subset \mathcal{S}_p$$

la familia (no vacía, por hipótesis) de grafos no conexos y distintos del vacío en $\mathcal{S}_p$. Consideremos el juego (N, v) definido:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si \;\; s = 1 \\ 0, & si \;\; 1 < s < n \\ n, & si \;\; S = N. \end{cases}$$

El juego (N, v) es equilibrado, pues el vector $(1, 1, \ldots, 1)$ pertenece trivialmente a su core.

Por otro lado, para cada $h = 1, \ldots, r$, sea $N/\gamma_h = \{C_k^h\}_{k=1,\ldots,m_h}$, y tendremos que:

a) $1 < m_h = |N/\gamma_h| < n$, pues $\gamma_h \neq \emptyset$ y no conexo, y

b) para cada $k = 1, \ldots, m_h$, ha de ser $|C_k^h| < n$, de nuevo por ser γ_h no conexo.

Por (b), para todo $k = 1, \ldots, m_h$, ha de ser $v(C_k^h) \in \{0, 1\}$ y, por (a), debe existir $k^* \in \{1, \ldots, m_h\}$, con $1 < |C_{k^*}^h| < n$ y $v(C_{k^*}^h) = 0$.

En consecuencia:

$$v^p(N) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) v^\gamma(N) = \sum_{h=1}^{r} p(\gamma_h) v^{\gamma_h}(N) + \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p \setminus \mathcal{D}_p} p(\gamma) v^\gamma(N) =$$

$$= \sum_{h=1}^{r} p(\gamma_h) \sum_{k=1}^{m_h} v(C_k^h) + \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p \setminus \mathcal{D}_p} p(\gamma) n \; < \; \sum_{h=1}^{r} p(\gamma_h) n + \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p \setminus \mathcal{D}_p} p(\gamma) n = n.$$

Pero, para cada $i \in N$, es cierto que:

$$v^p(\{i\}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) \; v^\gamma(\{i\}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) \; v(\{i\}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) = 1.$$

Y, obviamente, no existe un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n$ que satisfaga simultáneamente que $\sum_{i \in N} x_i = v^p(N) < n$ y que $x_i \geq v^p(\{i\}) = 1$ para cada $i \in N$. Por tanto, el core de (N, v^p) es vacío y el juego v^p no es equilibrado, siendo v un juego equilibrado. Luego (ii) no es cierta. Y esto cierra la demostración. $\square$

Si consideramos ahora la propiedad de equilibrio total, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.6 *Sean (N,p) un grafo probabilístico generalizado y (N,v) un juego TU. Si (N,v) es totalmente equilibrado, entonces (N,v^p) también lo es.*

Demostración: Van den Nouweland (1993) probó que, para cada $\gamma \in \Gamma^N$ y para cada juego (N,v) totalmente equilibrado, el juego (N,v^γ) es también totalmente equilibrado. Además, para cada $S \subset N$, $(S,v^p|_S)$ es el juego $(S,v^{p_{K_S}})$ y, por tanto, su función característica es una combinación lineal convexa de funciones características $v^\gamma|_S$ para $\gamma \subset K_S$. Como toda combinación lineal convexa de juegos equilibrados es un juego equilibrado, $(S,v^p|_S)$ es equilibrado para todo $S \subset N$ y, en consecuencia, (N,v^p) es un juego totalmente equilibrado. $\square$

3.4.4. Inclusión del valor de Shapley en el core

Analizaremos en este apartado las condiciones que se han de imponer al grafo probabilístico generalizado para garantizar que se herede la propiedad de que el valor de Shapley pertenezca al core.

La proposición siguiente establece que la propiedad se hereda si el soporte del grafo probabilístico generalizado subyacente (N,p) se reduce a los grafos vacío y completo. Para probarlo, introduciremos en primer lugar un lema, cuya prueba es trivial.

Lema 3.1 *Sean (N,v) y (N,w) dos juegos de G^N con core no vacío. Entonces, para cualesquiera α, $\beta \in I\!R^+$, $\boldsymbol{x} \in C(N,v)$ e $\boldsymbol{y} \in C(N,w)$, se tiene que:*

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in C(N, \alpha v + \beta w).$$

Proposición 3.7 *Sea $(N,p) \in \mathcal{P}^N$ tal que $\mathcal{S}_p = \{\emptyset, K_N\}$. Entonces, para todo juego (N,v) con $Sh(N,v) \in C(N,v)$, es: $Sh(N,v^p) \in C(N,v^p)$.*

Demostración: Se sigue directamente del lema previo y del hecho de que, para todo juego (N,v) con $Sh(N,v) \in C(N,v)$ y para $\gamma = \emptyset$ ó $\gamma = K_N$, es $Sh(N,v^\gamma) \in C(N,v^\gamma)$, pues, si $\gamma = \emptyset$, entonces $v^\emptyset(S) = \sum_{i\in S} v(\{i\})$ para todo $S \subset N$ y, obviamente, $Sh(N,v^\emptyset) = (v(\{i\}))_{i\in N} \in C(N,v^\emptyset)$; y si $\gamma = K_N$, $v^{K_N} = v$, y no es necesario añadir más. $\square$

Las siguientes proposiciones exploran las restantes situaciones, en las que existe algún grafo $\gamma \in \mathcal{S}_p$ con $\gamma \neq \emptyset$ y $\gamma \neq K_N$. Se consideran sucesivamente los casos en los que existe un tal grafo γ que además es: no conexo en primer lugar, conexo pero no ciclo-completo después y, por último, ciclo-completo pero no completo. En general, en estos casos, no se puede garantizar la herencia de la propiedad en cuestión.

Proposición 3.8 *Sea $(N,p) \in \mathcal{P}^N$ tal que existe al menos un grafo $\gamma \in \mathcal{S}_p$ con $\gamma \neq \emptyset$ y γ no conexo. Entonces, existe al menos un juego (N,v) con $Sh(N,v) \in C(N,v)$ y $Sh(N,v^p) \notin C(N,v^p)$.*

Demostración: Considérese otra vez el juego (N,v) que se utilizó en la demostración de la Proposición 3.5, definido:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si \;\; s = 1 \\ 0, & si \;\; 1 < s < n \\ n, & si \;\; S = N. \end{cases}$$

Entonces, $Sh(N,v) = (1,1,\ldots,1)$ pertenece trivialmente a $C(N,v)$. Como en la prueba de la Proposición 3.5, $C(N,v^p) = \emptyset$ si (N,p) es tal que existe $\gamma \in \mathcal{S}_p$, con $\gamma \neq \emptyset$ y γ no conexo. Por tanto, en esta situación particular, la propiedad de la inclusión en el core del valor de Shapley no se hereda. □

Proposición 3.9 *Sea $(N,p) \in \mathcal{P}^N$ tal que existe un grafo conexo pero no ciclo-completo γ_1 en $\mathcal{S}_p$. Entonces, si $p(\gamma_1)$ es suficientemente grande, existe un juego (N,v) tal que $Sh(N,v) \in C(N,v)$ pero $Sh(N,v^p) \notin C(N,v^p)$.*

Demostración: Supongamos que $\gamma_1 \in \mathcal{S}_p$ es conexo, pero no ciclo-completo. Entonces, existirán al menos un ciclo minimal (en el sentido de no contener ningún otro ciclo) $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1)$ en γ_1 y dos nodos x_i y x_j, con $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$ y tales que: $i < j-1$, y $\{x_i, x_j\} \notin \gamma_1$.

Para simplificar la notación, y sin pérdida de generalidad, supongamos también que, para todo $l \in \{1,2,\ldots,k\}$, es $x_l = l$. Consideremos entonces el juego $v = u_{\{i,j\}}$. Es fácil ver que para este juego es $Sh(N, u_{\{i,j\}}) \in C(N, u_{\{i,j\}})$.

Consideremos también la coalición $S = \{i, i+1, \ldots, j\}$, con $s \geq 3$ y para la que:

$$\sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma_1}) < v^{\gamma_1}(S) = 1,$$

pues, por un lado, $\{i, j\}$ es conexo en $(S, \gamma_1|_S)$, ya que existe el camino $(i, i+1, \ldots, j)$ que comunica i con j en γ_1 pero, por el otro, existe al menos un camino alternativo en γ_1, $(j, j+1, \ldots, k, 1, 2, \ldots, i)$, para conectar i y j. Los nodos que forman este segundo camino son los elementos de uno de los conjuntos minimales de conexión de $\{i, j\}$ en (N, γ_1), y los intermediarios, es decir, los elementos del conjunto $T = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus S$, deben recibir también su compensación en el juego $u^{\gamma_1}_{\{i,j\}}$ de conectar i y j en γ_1, que será necesariamente una cantidad estrictamente positiva para cada uno de ellos.

Para esta coalición S y este juego $v = u_{\{i,j\}}$ específicos, tenemos:

$$\sum_{l \in S} Sh_l(N, v^p) = \sum_{l \in S} \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) Sh_l(N, v^{\gamma}) = p(\gamma_1) \sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma_1}) + \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p,\ \gamma \neq \gamma_1} p(\gamma) \sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma}),$$

y:

$$v^p(S) = p(\gamma_1)\ v^{\gamma_1}(S) + \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p,\ \gamma \neq \gamma_1} p(\gamma)\ v^{\gamma}(S).$$

En consecuencia, será $v^p(S) > \sum_{l \in S} Sh_l(N, v^p)$ si y sólo si:

$$p(\gamma_1) > \frac{\displaystyle\sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p,\ \gamma \neq \gamma_1} p(\gamma) \left[\sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma}) - v^{\gamma}(S) \right]}{\displaystyle v^{\gamma_1}(S) - \sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma_1})}. \tag{3.5}$$

Recordemos que v es el juego de unanimidad $u_{\{i,j\}}$ y, por tanto, para todo $\gamma \in \mathcal{S}_p$ con $\gamma \neq \gamma_1$, es:

$$\sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma}) - v^{\gamma}(S) \leq 1.$$

Así, una condición suficiente para que la desigualdad en (3.5) se satisfaga es que:

$$p(\gamma_1) > \frac{1 - p(\gamma_1)}{v^{\gamma_1}(S) - \sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma_1})} \quad, \text{ó} \qquad p(\gamma_1) > \frac{1}{v^{\gamma_1}(S) - \sum_{l \in S} Sh_l(N, v^{\gamma_1}) + 1},$$

lo que siempre resulta posible, por ser el segundo miembro de la última desigualdad estrictamente menor que 1. □

Proposición 3.10 *Sea $(N, p) \in \mathcal{P}^N$ tal que existe un grafo ciclo-completo pero no completo γ_2 en $\mathcal{S}_p$. Entonces, si $p(\gamma_2)$ es suficientemente grande, existe un juego (N, v) tal que $Sh(N, v) \in C(N, v)$ pero $Sh(N, v^p) \notin C(N, v^p)$.*

Demostración: Sea $\gamma_2 \in \mathcal{S}_p$ un grafo conexo y ciclo-completo, pero no completo. Consideremos entonces dos nodos $i, j \in N$ que no estén directamente conectados en γ_2. Además, por ser γ_2 ciclo-completo, existirá un único camino geodésico entre i y j. Tomemos tres nodos consecutivos en este camino y, sin pérdida de generalidad, llamémosles $1,\ 2$ y 3. Se sigue que $\gamma_2|_{\{1,2,3\}} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

Consideremos el juego $v = -u_{\{1,2\}} - u_{\{1,3\}} - u_{\{2,3\}} + 3u_{\{1,2,3\}}$. Resulta $Sh_i(N, v) = 0$ para todo $i \in N$ y es fácil comprobar que $Sh(N, v) \in C(N, v)$, que se reduce al vector $\mathbf{0}$. Como $v^{\gamma_2} = -u_{\{1,2\}} - u_{\{2,3\}} + 2u_{\{1,2,3\}}$, se deduce que $Sh_2(N, v^{\gamma_2}) = -\frac{1}{3} < 0 = v^{\gamma_2}(\{2\})$ y, por tanto, $Sh(N, v^{\gamma_2}) \notin C(N, v^{\gamma_2})$ que, de nuevo, se reduce al $\mathbf{0}$.

Por otro lado:

$$Sh_2(N, v^p) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) Sh_2(N, v^{\gamma}) = -\frac{1}{3}\ p(\gamma_2) + \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p\ \gamma \neq \gamma_2} p(\gamma) Sh_2(N, v^{\gamma}),$$

y:

$$v^p(\{2\}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma) v^{\gamma}(\{2\}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p\ \gamma \neq \gamma_2} p(\gamma) v^{\gamma}(\{2\}) = 0.$$

Ahora, $Sh_2(N, v^p) < v^p(\{2\})$ si y sólo si:

$$p(\gamma_2) > \ 3 \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p \ \gamma \neq \gamma_2} p(\gamma) Sh_2(N, v^\gamma). \tag{3.6}$$

Como $Sh_2(N, v^\gamma) \leq 1$ para todo $\gamma \in \mathcal{S}_p$, una condición suficiente para que se satisfaga (3.6) es que:

$$p(\gamma_2) > 3(1 - p(\gamma_2)) \ \ \textit{ó, equivalentemente,} \ \ p(\gamma_2) > \frac{3}{4}.$$

□

3.5. Dos caracterizaciones del valor de Myerson probabilístico

Dedicaremos este apartado a presentar dos caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson probabilístico en términos de tres propiedades cada una de las cuales es la extensión natural de la que recibe el mismo nombre en el caso determinista: *eficiencia en componentes*, *equidad* y *contribuciones equilibradas*. Probaremos también que el valor definido satisface la propiedad de *estabilidad*.

Una regla de reparto para situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas satisface la propiedad de eficiencia en componentes si el pago total a los miembros de cada una de las componentes conexas (probabilísticas) es igual al valor esperado de dicha componente. Formalmente:

Definición 3.3 *Una regla de reparto $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ es eficiente en componentes si, para toda $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}^N$ y para toda componente $C \in N/p$:*

$$\sum_{i \in C} \Psi_i(N, v, p) = v^p(C).$$

Observación 3.2 *La propiedad de eficiencia en componentes en el caso determinista es sólo un caso particular de la anterior, en el que, para un cierto grafo $\gamma \in \Gamma^N$, es $p = p^\gamma$ y, por tanto, $N/p = N/\gamma$ y $v^p = v^\gamma$.*

La propiedad de equidad para situaciones de comunicación deterministas establece que, si desaparece la posibilidad de una comunicación directa entre dos jugadores i y j, manteniéndose igual lo demás (es decir, si se modifica el grafo eliminando la arista $l = \{i, j\}$), los pagos a ambos jugadores deben verse modificados en la misma cantidad.

La generalización natural de la propiedad de equidad al caso probabilístico establece que la sustitución de un grafo probabilístico generalizado por el subgrafo que se obtiene al eliminar del mismo la arista $l = \{i, j\}$ debe producir efectos iguales en los pagos a los jugadores i y j.

Definición 3.4 *Una regla de reparto $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ es equitativa si, para toda arista $l = \{i, j\}$ con $i, j \in N$ y para toda $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}^N$, se cumple que:*

$$\Psi_i(N, v, p) - \Psi_i(N, v, p_{-\{l\}}) = \Psi_j(N, v, p) - \Psi_j(N, v, p_{-\{l\}}).$$

Observación 3.3 *Dos casos especiales de la definición anterior son:*

- *El caso determinista. Consideremos la situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) en la que $p = p^{\gamma \cup \{l\}}$ para un cierto grafo $\gamma \in \Gamma^N$ con $l \notin \gamma$. Nótese que, entonces, $p_{-\{l\}} = p^\gamma$, la distribución de probabilidad degenerada en γ, con $p_{-\{l\}}(\gamma) = p(\gamma \cup \{l\}) + p(\gamma) = 1$.*
- *El caso de las situaciones de comunicación probabilísticas. La propiedad de equidad para las situaciones de comunicación probabilísticas definidas en Calvo et al. (1999) puede considerarse también un caso particular de la anterior. En efecto, si, dada la arista $l = \{i, j\}$, se pasa de la situación de comunicación probabilística $(N, v, \hat{p})$ a $(N, v, \hat{q})$, con $\hat{q}(k) = \hat{p}(k)$ para toda arista $k \neq l$ y $\hat{q}(l) = 0$ (es decir, si se elimina la posibilidad de una comunicación directa entre i y j, manteniendo lo demás igual), entonces la situación de comunicación probabilística generalizada inducida (N, v, q) coincide con $(N, v, p_{-\{l\}})$ y, en consecuencia, por la Definición 3.4, los pagos a ambos jugadores i y j deben verse modificados en la misma cantidad.*

Una regla de reparto para situaciones de comunicación (deterministas) satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si el perjuicio que el aislamiento del jugador i ocasiona al jugador j es el mismo que el que el aislamiento del jugador j causa al jugador i.

En nuestro modelo, el aislamiento del jugador i puede interpretarse como el paso de un grafo probabilístico generalizado dado (N, p) al subgrafo probabilístico generalizado (N, p_{-i}).

Definición 3.5 *Una regla de reparto $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si, para toda $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}^N$ y para todos $i, j \in N$:*

$$\Psi_j(N, v, p) - \Psi_j(N, v, p_{_{-i}}) = \Psi_i(N, v, p) - \Psi_i(N, v, p_{_{-j}}).$$

Observación 3.4 *De nuevo, las versiones de la propiedad de contribuciones equilibradas para los casos determinista y probabilístico pueden obtenerse como casos particulares de la anterior definición.*

- *El caso determinista. Si el grafo probabilístico generalizado (N, p) es tal que, para un cierto $\gamma \in \Gamma^N$ es $p = p^\gamma$, entonces, para $k = i, j$, el grafo probabilístico generalizado $(N, p_{_{-k}})$ es tal que $p_{_{-k}} = p^{(\gamma_{-k})}$, pues:*

$$p_{_{-k}}(\gamma_{_{-k}}) = \sum_{\eta \subset L_k(K_N)} p(\gamma_{_{-k}} \cup \eta) = p(\gamma_{_{-k}} \cup L_k(\gamma)) = p(\gamma) = 1.$$

- *El caso de las situaciones de comunicación probabilísticas. Dada una situación de comunicación probabilística $(N, v, \hat{p})$, aislar un nodo fijo i es equivalente a pasar a una nueva situación de comunicación probabilística $(N, v, \hat{q})$, en la que la distribución de probabilidad $\hat{q}$ es tal que $\hat{q}(l) = 0$ si $i \in l$, y $\hat{q}(l) = \hat{p}(l)$ en otro caso.*

  Así, las situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas (N, v, p) y (N, v, q) inducidas por las funciones $\hat{p}$ y $\hat{q}$ respectivamente son tales que $(N, q) = (N, p_{-i})$, pues $q(\xi) = 0$ si $L_i(\xi) \neq \emptyset$ y, si $L_i(\xi) = \emptyset$, entonces:

$$q(\xi) = \prod_{l \in \xi} \hat{q}(l) \prod_{l \notin \xi} (1 - \hat{q}(l)) = \prod_{l \in \xi} \hat{q}(l) \prod_{l \in K_N \setminus \xi} (1 - \hat{q}(l)) = p_{-i}(\xi),$$

  y análogamente para el jugador j.

Teorema 3.1 *El valor de Myerson es la única regla de reparto* $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ *que satisface eficiencia en componentes y equidad.*

Demostración: Para probar que el valor de Myerson satisface eficiencia en componentes, sean $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}^N$ y $C \in N/p$. De la linealidad del valor de Shapley se sigue que:

$$\sum_{i \in C} \mu_i(N, v, p) = \sum_{i \in C} Sh_i(N, v^p) = \sum_{i \in C} Sh_i\left(N, \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma) v^\gamma\right) =$$

$$= \sum_{i \in C} \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma) Sh_i(N, v^\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma) \sum_{i \in C} Sh_i(N, v^\gamma).$$

Como $C \in N/p$, para cada $\gamma \in \mathcal{S}_p$, C es una unión de componentes conexos (deterministas) de N en γ (elementos de N/γ), es decir:

$$C = \bigcup_{k=1}^{r^\gamma(C)} T_{k,\gamma}(C), \quad \text{con } T_{k,\gamma}(C) \in N/\gamma \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, r^\gamma(C).$$

Para cada uno de estos componentes $T_{k,\gamma}(C)$, la eficiencia en componentes del valor de Myerson (determinista) nos permite asegurar que:

$$\sum_{i \in T_{k,\gamma}(C)} Sh_i(N, v^\gamma) = v(T_{k,\gamma}(C))$$

y, por tanto, si $\gamma \in \mathcal{S}_p$, entonces:

$$\sum_{i \in C} Sh_i(N, v^\gamma) = \sum_{k=1}^{r^\gamma(C)} \sum_{i \in T_{k,\gamma}(C)} Sh_i(N, v^\gamma) = \sum_{k=1}^{r^\gamma(C)} v\left(T_{k,\gamma}(C)\right) = v^\gamma(C).$$

En consecuencia, de la definición de v^p se tiene que:

$$\sum_{i \in C} \mu_i(N, v, p) = \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma) \sum_{i \in C} Sh_i(N, v^\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_p} p(\gamma)\ v^\gamma(C) = v^p(C).$$

Para probar que satisface también equidad, consideremos una situación de comunicación probabilística generalizada (N, v, p) y una arista fija $l = \{i, j\}$, con $i, j \in N$. Entonces:

$$\mu_i(N,v,p) - \mu_i(N,v,p_{_{-\{l\}}}) = \sum_{\gamma\in\Gamma^N} p(\gamma)\ Sh_i(N,v^\gamma) - \sum_{\gamma\in\Gamma^N,\ l\notin\gamma} p_{_{-\{l\}}}(\gamma)\ Sh_i(N,v^\gamma) =$$

$$= \sum_{\gamma\in\Gamma^N,\ l\notin\gamma} p(\gamma)\ Sh_i(N,v^\gamma) + \sum_{\gamma\in\Gamma^N,\ l\notin\gamma} p(\gamma\cup\{l\})\ Sh_i(N,v^{\gamma\cup\{l\}}) -$$

$$- \sum_{\gamma\in\Gamma^N,\ l\notin\gamma} [p(\gamma) + p(\gamma\cup\{l\})]\ \ Sh_i(N,v^\gamma).$$

Y, por tanto:

$$\mu_i(N,v,p) - \mu_i(N,v,p_{_{-\{l\}}}) = \sum_{\gamma\in\Gamma^N,\ l\notin\gamma} p(\gamma\cup\{l\}) \left[Sh_i(N,v^{\gamma\cup\{l\}}) - Sh_i(N,v^\gamma)\right] \quad (3.7)$$

Por la propiedad de equidad en el caso determinista:

$$Sh_i(N,v^{\gamma\cup\{l\}}) - Sh_i(N,v^\gamma) = Sh_j(N,v^{\gamma\cup\{l\}}) - Sh_j(N,v^\gamma),$$

para todo $\gamma\in\Gamma^N$ con $l\notin\gamma$ y, en consecuencia:

$$\mu_i(N,v,p) - \mu_i(N,v,p_{_{-\{l\}}}) = \sum_{\gamma\in\Gamma^N,\ l\notin\gamma} p(\gamma\cup\{l\}) \left[Sh_j(N,v^{\gamma\cup\{l\}}) - Sh_j(N,v^\gamma)\right] \quad (3.8)$$

Pero (3.8) coincide con $\mu_j(N,v,p) - \mu_j(N,v,p_{_{-\{l\}}})$. Para probarlo, basta con seguir la línea argumental que condujo a (3.7).

Para probar la unicidad, supongamos que Ψ^1 y Ψ^2 son dos reglas de reparto en $\mathcal{GPCS}^N$ que satisfacen eficiencia en componentes y equidad. Vamos a probar que $\Psi^1(N,v,p)$ y $\Psi^2(N,v,p)$ coinciden para toda situación de comunicación probabilística generalizada $(N,v,p)\in\mathcal{GPCS}^N$ por inducción sobre el cardinal del grafo determinista:

$$\gamma_p = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{S}_p} \gamma$$

Nótese en primer lugar que $|\gamma_p| = 0$ implica que $p(\emptyset) = 1$ (es decir, que $p = p^{\emptyset}$) y que $N/p = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$. Entonces, por eficiencia en componentes, para todo $k \in N$:

$$\Psi_k^1(N, v, p) = v(\{k\}) = \Psi_k^2(N, v, p).$$

Sea $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}^N$ tal que, para toda distribución de probabilidad $q \in \mathcal{P}^N$ con $|\gamma_q| < |\gamma_p|$, se satisfaga que $\Psi^1(N, v, q) = \Psi^2(N, v, q)$. Debemos probar que, en estas condiciones, ha de ser $\Psi^1(N, v, p) = \Psi^2(N, v, p)$. Supongamos que $l = \{i, j\}$ es una arista de γ_p. Sabemos que $\Psi^1(N, v, p_{-\{l\}}) = \Psi^2(N, v, p_{-\{l\}})$, pues $|\gamma_{p_{-\{l\}}}| = |\gamma_p| - 1$. Además, Ψ^1 y Ψ^2 satisfacen equidad. Luego:

$$\Psi_i^1(N, v, p) - \Psi_j^1(N, v, p) = \Psi_i^1(N, v, p_{-\{l\}}) - \Psi_j^1(N, v, p_{-\{l\}}) =$$

$$= \Psi_i^2(N, v, p_{-\{l\}}) - \Psi_j^2(N, v, p_{-\{l\}}) = \Psi_i^2(N, v, p) - \Psi_j^2(N, v, p).$$

Y, por tanto,

$$\Psi_i^1(N, v, p) - \Psi_i^2(N, v, p) = \Psi_j^1(N, v, p) - \Psi_j^2(N, v, p),$$

y esto es cierto para cualesquiera dos nodos i y j tales que la arista $l = \{i, j\} \in \gamma_p$, y en consecuencia, y por transitividad, para cualesquiera dos nodos i y j que estén en la misma componente conexa $C \in N/p$.

Así, para todo $C \in N/p$, existe $d_C \in I\!R$ tal que, para todo $i \in C$:

$$\Psi_i^1(N, v, p) - \Psi_i^2(N, v, p) = d_C.$$

Utilizando la eficiencia en componentes de Ψ^1 y Ψ^2, tendremos, para todo $C \in N/p$:

$$\sum_{i \in C} \Psi_i^1(N, v, p) = \sum_{i \in C} \Psi_i^2(N, v, p) = v^p(C).$$

Luego:

$$0 = \sum_{i \in C} \Psi_i^1(N, v, p) - \sum_{i \in C} \Psi_i^2(N, v, p) = d_C |C|,$$

y así, $d_C = 0$ y:

$$\Psi_i^1(N, v, p) = \Psi_i^2(N, v, p), \quad para \;\; todo \;\; i \in N.$$

□

Ejemplo 3.3 *En la situación de comunicación probabilística generalizada del Ejemplo 3.2, observemos que* $N/p = \{N\}$ *y que la eficiencia en componentes impone que:*

$$\sum_i \mu_i(N, v, p) = 0{,}9 = v^p(N) = (0{,}6)1 + (0{,}3)1.$$

Supongamos que, como consecuencia de la dinámica parlamentaria, en un cierto momento a lo largo del periodo legislativo los partidos 3 y 4 rompen su relación. La equidad nos dice que ambos partidos deben sufrir el mismo perjuicio como consecuencia de esta ruptura. La situación de comunicación probabilística generalizada resultante será $(N, v, p_{-\{l\}})$*, siendo* $l = \{3, 4\}$*,* $p_{-\{l\}}(\{2, 3\}) = 0{,}4$ *y* $p_{-\{l\}}(\{1, 2\}, \{2, 3\}) = 0{,}6$*. Entonces:*

$$\mu(N, v, p_{-\{l\}}) = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, 0\right),$$

y, como era $\mu(N, v, p) = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$*, resulta:*

$$\mu_3(N, v, p) - \mu_3(N, v, p_{-\{l\}}) = \mu_4(N, v, p) - \mu_4(N, v, p_{-\{l\}}) = \frac{1}{10}.$$

Teorema 3.2 *El valor de Myerson es la única regla de reparto* $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ *que satisface eficiencia en componentes y contribuciones equilibradas.*

Demostración: En el teorema anterior se probó ya que el valor de Myerson satisface eficiencia en componentes. Para probar unicidad basta con reproducir la parte correspondiente de la demostración del Teorema 3.1 (aplicando, como es obvio, contribuciones equilibradas en lugar de equidad). Por tanto, se omite aquí la correspondiente demostración, y probaremos sólo que el valor de Myerson (probabilístico) satisface también contribuciones equilibradas.

Sean $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}^N$ y dos nodos $i, j \in N$. Probaremos que:

$$\mu_i(N, v, p) - \mu_i(N, v, p_{-j}) = \mu_j(N, v, p) - \mu_j(N, v, p_{-i}).$$

Tenemos que:

$$\mu_i(N, v, p) - \mu_i(N, v, p_{-j}) = \sum_{\gamma \in \Gamma^N} p(\gamma)\mu_i(N, v, \gamma) - \sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}} p_{-j}(\gamma)\mu_i(N, v, \gamma) =$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}} p(\gamma)\mu_i(N, v, \gamma) + \sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}} \sum_{\emptyset \neq \eta \in \Gamma^N \setminus \Gamma^{N \setminus \{j\}}} p(\gamma \cup \eta)\mu_i(N, v, \gamma \cup \eta) -$$

$$- \sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}} \left(p(\gamma) + \sum_{\emptyset \neq \eta \in \Gamma^N \setminus \Gamma^{N \setminus \{j\}}} p(\gamma \cup \eta) \right) \mu_i(N, v, \gamma) =$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}} \sum_{\emptyset \neq \eta \in \Gamma^N \setminus \Gamma^{N \setminus \{j\}}} p(\gamma \cup \eta) \left[\mu_i(N, v, \gamma \cup \eta) - \mu_i(N, v, \gamma) \right]. \tag{3.9}$$

Pero, si $\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}$ y $\emptyset \neq \eta \in \Gamma^N \setminus \Gamma^{N \setminus \{j\}}$, entonces ha de ser $\gamma = (\gamma \cup \eta)_{-j}$ y, en consecuencia, $\mu_i(N, v, \gamma) = \mu_i(N, v, (\gamma \cup \eta)_{-j})$. Como el valor de Myerson determinista satisface la propiedad de contribuciones equilibradas, será:

$$\mu_i(N, v, \gamma \cup \eta) - \mu_i(N, v, (\gamma \cup \eta)_{-j}) = \mu_j(N, v, \gamma \cup \eta) - \mu_j(N, v, (\gamma \cup \eta)_{-i})$$

y, por tanto $\mu_i(N, v, p) - \mu_i(N, v, p_{-j})$ será igual a:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{j\}}} \sum_{\emptyset \neq \eta \in \Gamma^N \setminus \Gamma^{N \setminus \{j\}}} p(\gamma \cup \eta) \left[\mu_j(N, v, \gamma \cup \eta) - \mu_j(N, v, (\gamma \cup \eta)_{-i}) \right].$$

Esta última expresión puede reescribirse del modo siguiente:

$$\mu_i(N,v,p) - \mu_i(N,v,p_{-j}) = \sum_{\gamma' \in \Gamma^N,\ L_j(\gamma') \neq \emptyset} p(\gamma') \left[\mu_j(N,v,\gamma') - \mu_j(N,v,\gamma'_{-i})\right] =$$

$$= \sum_{\gamma' \in \Gamma^N,\ L_j(\gamma') \neq \emptyset,\ L_i(\gamma') \neq \emptyset} p(\gamma') \left[\mu_j(N,v,\gamma') - \mu_j(N,v,\gamma'_{-i})\right]. \qquad (3.10)$$

La última igualdad en (3.10) se satisface porque, si $L_i(\gamma') = \emptyset$, entonces $\gamma' = \gamma'_{-i}$ y, en consecuencia:

$$\mu_j(N,v,\gamma') - \mu_j(N,v,\gamma'_{-i}) = 0.$$

Además, la última expresión en (3.10) coincide con:

$$\sum_{\gamma' \in \Gamma^N,\ L_i(\gamma') \neq \emptyset} p(\gamma') \left[\mu_j(N,v,\gamma') - \mu_j(N,v,\gamma'_{-i})\right], \qquad (3.11)$$

ya que, si $L_j(\gamma') = \emptyset$, entonces j es un nodo aislado en γ' y en γ'_{-i} y, en ese caso:

$$\mu_j(N,v,\gamma') - \mu_j(N,v,\gamma'_{-i}) = v(\{j\}) - v(\{j\}) = 0.$$

Para acabar, (3.11) puede reescribirse como sigue:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma^{N \setminus \{i\}}} \ \sum_{\emptyset \neq \eta \in \Gamma^N \setminus \Gamma^{N \setminus \{i\}}} p(\gamma \cup \eta) [\ \mu_j(N,v,\gamma \cup \eta) - \mu_j\,(N,v,(\gamma \cup \eta)_{-i})], \qquad (3.12)$$

y, utilizando el desarrollo que nos llevó a la última expresión en (3.9), es fácil ver que la que aparece en (3.12) coincide con:

$$\mu_j(N,v,p) - \mu_j(N,v,p_{-i}).$$

$\square$

Ejemplo 3.4 *Volviendo a la situación descrita en el Ejemplo 3.2, supongamos que el partido* 2 *planea una reforma constitucional, que afecta a aspectos muy sensibles del ordenamiento jurídico del estado, y que requiere para su aprobación una mayoría cualificada de* $2/3$. *El partido* 3*, absolutamente en desacuerdo con la propuesta, decide aislarse, imposibilitando la aprobación de la misma. En este caso,* $p_{_{-3}}$ *viene dada por* $p_{_{-3}}(\emptyset) = 1$*, y por tanto,* $\mu(N, v, p_{-3}) = (0, 0, 0, 0)$. *Si comparamos con la situación en la que es el partido* 1 *el que se aísla, rompiendo su única posibilidad de comunicación directa con el partido* 2*, y dando lugar al reparto* $\mu(N, v, p_{_{-1}}) = \left(0, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$*, tenemos que:*

$$\mu_1(N, v, p) - \mu_1(N, v, p_{_{-3}}) = 0{,}2 - 0{,}0 = 0{,}2, \quad y$$

$$\mu_3(N, v, p) - \mu_3(N, v, p_{_{-1}}) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2.$$

Por último, vamos a prestar atención a una de las propiedades más relevantes de las reglas de reparto para situaciones de comunicación en el caso determinista, la estabilidad, y analizaremos si esta propiedad se mantiene para el valor de Myerson probabilístico. Como se ha dicho anteriormente, la propiedad de equidad establece que, si sustituimos un grafo probabilístico generalizado por el subgrafo que se obtiene al eliminar del primero una arista entre dos jugadores i y j, el efecto para ambos jugadores ha de ser el mismo. La propiedad de *estabilidad* se satisfará si, además, dicho efecto ha de ser negativo o nulo.

Definición 3.6 *Una regla de reparto* Ψ *definida en una cierta clase* $\mathcal{GPCS} \subset \mathcal{GPCS}^\infty$ *de situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas diremos que es estable (en dicha clase) si, para toda* $(N, v, p) \in \mathcal{GPCS}$ *y para toda arista* $l = \{i, j\}$ *con* $i, j \in N$*, se satisface que:*

$$\Psi_k(N, v, p) \geq \Psi_k(N, v, p_{_{-\{l\}}}), \quad para \quad k = i, j.$$

Teorema 3.3 *Si nos restringimos a la clase de las situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas en las que el juego* v *es superaditivo, entonces el valor de Myerson es estable.*

Demostración: De la Ecuación (3.7) en la demostración del Teorema 3.1 se sigue que, para toda arista $l = \{i, j\}$ con $i, j \in N$, y para $k = i, j$:

$$\mu_k(N,v,p) - \mu_k(N,v,p_{-\{l\}}) = \sum_{\gamma \in \Gamma^N,\ l \notin \gamma} p(\gamma \cup \{l\}) \left(Sh_k(N, v^{\gamma \cup \{l\}}) - Sh_k(N, v^{\gamma}) \right),$$

que es una cantidad no negativa, por ser el juego v superaditivo y por la estabilidad del valor de Myerson para situaciones de comunicación clásicas. □

3.6. Observaciones finales

1. Consideramos interesante hacer notar que cada una de las propiedades de las reglas de reparto para situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas introducidas en la última sección (Definiciones 3.4, 3.5 y 3.6) puede extenderse de modo que contemple situaciones más generales, como se expone a continuación.

Definición 3.7 *Diremos que una regla de reparto* $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ *satisface la propiedad de equidad generalizada si, para toda* $l = \{i,j\}$ *con* $i,j \in N$ *y para todas* (N,v,p) *y* $(N,v,q) \in \mathcal{GPCS}^N$ *tales que* $p_{-\{l\}} = q_{-\{l\}}$*:*

$$\Psi_i(N,v,p) - \Psi_i(N,v,q) = \Psi_j(N,v,p) - \Psi_j(N,v,q).$$

Definición 3.8 *Diremos que una regla de reparto* $\Psi : \mathcal{GPCS}^N \to I\!R^n$ *satisface la propiedad de contribuciones equilibradas generalizada si, para toda terna* (N,v,p), (N,v,q) *y* $(N,v,r) \in \mathcal{GPCS}^N$ *y para todos* $i,j \in N$ *tales que* $q_{K_{N\setminus\{i\}}} = p_{K_{N\setminus\{i\}}}$, $r_{K_{N\setminus\{j\}}} = p_{K_{N\setminus\{j\}}}$ *y* $q(\gamma) = r(\gamma)$ *para todo* $\gamma \in \Gamma^N$ *con* $L_i(\gamma) \neq \emptyset$ *y* $L_j(\gamma) \neq \emptyset$*, se cumple que:*

$$\Psi_i(N,v,p) - \Psi_i(N,v,r) = \Psi_j(N,v,p) - \Psi_j(N,v,q).$$

Definición 3.9 *Diremos que una regla de reparto* Ψ *definida en una cierta clase* $\mathcal{GPCS} \subset \mathcal{GPCS}^\infty$ *de situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas satisface la propiedad de estabilidad generalizada si, para todas* (N,v,p) *y* $(N,v,q) \in \mathcal{GPCS}$ *y toda arista* $l = \{i,j\}$ *con* $i,j \in N$*, y tales que* $p_{-\{l\}} = q_{-\{l\}}$*, y* $p(\gamma \cup \{l\}) \geq q(\gamma \cup \{l\})$ *para todo* $\gamma \in \Gamma^N$ *con* $l \notin \gamma$*, se satisface que:*

$$\Psi_k(N,v,p) \geq \Psi_k(N,v,q), \quad para\ k = i,j.$$

Además, si sustituimos las propiedades de equidad, contribuciones equilibradas y estabilidad en los Teoremas 3.1, 3.2 y 3.3 respectivamente por sus versiones ”extendidas” o generalizadas, los enunciados resultantes siguen siendo válidos, y sus demostraciones son similares a las presentadas.

2. En la línea de encontrar aplicaciones relevantes en el ámbito de la sociología a nuestros trabajos en el terreno de las situaciones de comunicación, en Gómez et al. (2008a), se utilizó una clase particular de situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas para definir una familia de medidas de cohesividad para grupos de actores en redes sociales o económicas.

3. Caracterizaciones alternativas: Se encuentran en la literatura caracterizaciones del valor de Myerson que hacen uso de propiedades distintas de las aquí mencionadas, como pueden ser la del jugador superfluo u otras. Consideramos que podría ser de interés analizar el sentido y utilidad de estas propiedades en el contexto de las situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas y explorar si se mantienen las correspondientes caracterizaciones.

Capítulo 4

Juegos generalizados y grafos dirigidos

4.1. Introducción

El modelo original de Myerson para juegos con restricciones en la formación de coaliciones asume que las aristas que representan las comunicaciones directas son simétricas, en el sentido de que los dos jugadores unidos por una de estas aristas tienen igual control sobre ella, en cualquiera de los sentidos posibles. Más en general, en dicho modelo se asume que, si partiendo del jugador i existe un camino que permite a éste comunicar con el jugador j, dicho camino será también practicable en el sentido opuesto, permitiendo a j comunicar con i. A pesar de ello, hay muchas situaciones reales en la que el modelo basado en grafos no dirigidos no resulta adecuado. Esto puede ocurrir, por ejemplo, porque uno de los dos jugadores pueda iniciar la comunicación o la relación, pero no el otro. En algunas ocasiones, estas condiciones pueden venir impuestas por alguna autoridad reguladora. En otro tipo de situaciones, como por ejemplo la red de citas de artículos en publicaciones científicas, es obvio que cada arista ha de tener necesariamente una dirección fija [1]. En este capítulo

[1] También en Biología, donde tanto las redes regulatorias transcripcionales como las redes metabólicas se modelan habitualmente como grafos dirigidos. En una red regulatoria transcripcional, los nodos representan genes, y los arcos, interacciones entre estos genes. Puesto que tales interacciones tienen una dirección natural asociada, estas redes se modelan como grafos dirigidos. Cf. Mason y Verwoerd (2007) para más detalles.

construiremos un modelo para este tipo de situaciones y, para ello, identificaremos una red de comunicaciones con un grafo dirigido. Este enfoque tiene precedentes en la literatura. Entre ellos, citaremos los siguientes:

Gilles, Owen y van den Brink (1992), van den Brink y Gilles (1996), Gilles y Owen (1999) y van den Brink (1997), analizan el modelo de los *juegos con estructura de permiso*, que consisten en un juego TU estándar y un grafo dirigido (de un tipo particular). Consideran soluciones aplicadas al juego restringido que se obtiene a partir del juego original y el grafo dirigido, pero el modelo no generaliza ni el juego restringido al grafo ni el valor de Myerson para situaciones de comunicación.

Slikker y van den Nouweland (2001) y Slikker et al. (2005) llaman *situación de comunicación dirigida* a una terna formada por una *red de comunicación dirigida* (un digrafo) y una *función de recompensa dirigida*, que suponen aditiva en componentes y que asigna un número real a cada uno de los posibles digrafos en una clase a la que imponen ciertas condiciones. Definen y caracterizan las que llaman reglas de reparto para estas situaciones de comunicación dirigidas.

En el modelo que aquí se presenta, y a diferencia de los anteriores, permitiremos que el valor de una coalición dependa del orden en que los jugadores se incorporen a ella y no estableceremos restricciones sobre el tipo de digrafo que modela la red de comunicaciones. Para representar los intereses de los jugadores en una situación del tipo descrito, utilizaremos los *juegos n-personales en forma de función característica generalizada*, introducidos por Nowak y Radzik (1994). Como ya se ha dicho, en un juego TU en forma de función característica (estándar), cada coalición o conjunto de jugadores obtiene una cierta cantidad, que podemos suponer monetaria, y que llamamos el valor de la coalición. En el modelo de Nowak y Radzik, cada *coalición ordenada* o permutación de los jugadores de una coalición dada obtiene un determinado valor, que puede ser distinto para dos ordenaciones distintas del mismo conjunto de jugadores. Puede ocurrir, por ejemplo, que la coalición formada por los jugadores 1 y 2 obtenga un cierto valor si se incorpora primero el jugador 1 y luego el jugador 2, y un valor distinto si el orden en el que los jugadores se incorporan a la coalición es el opuesto. Una situación de comunicación dirigida consistirá entonces en nuestro modelo en un juego TU generalizado y un grafo dirigido definido sobre el conjunto de jugadores. El modelo de Myerson puede considerarse un caso particular del aquí propuesto en el que, en el juego, y para todo conjunto de jugadores fijo, el valor de cualquiera de sus permutaciones es el mismo y, en el grafo dirigido, entre cada par de jugadores o bien no hay ningún arco o bien hay dos, uno en cada sentido. Nuestro objetivo en lo que sigue será extender el modelo de Myerson a este contexto más general, definiendo un juego restringido al digrafo y un valor que, en el caso de que la situación de comunicación dirigida sea equivalente a una no dirigida, coincidan con el juego restringido y el valor definidos por Myerson.

Una vez precisado el objetivo y los medios (grafos dirigidos y juegos generalizados) la principal elección a la que hemos de enfrentarnos en la construcción de nuestro modelo es la determinación del modo en que el grafo dirigido produce su efecto limitando las posibilidades de cooperación. En esencia, se trata de decidir cuáles son las *coaliciones ordenadas conexas* en un grafo dirigido. Obviamente, esto puede hacerse de diferentes maneras.

En nuestro modelo diremos que una coalición ordenada es conexa si, para cada par de jugadores consecutivos en la ordenación, existe un camino dirigido que permite, partiendo del predecesor, alcanzar al sucesor (y que, posiblemente, utilice a jugadores no pertenecientes a la coalición). Partiendo de esta idea de conexión, a cada situación de comunicación dirigida le haremos corresponder un juego restringido (al digrafo), que será un juego TU del tipo clásico, y en el que el valor de cada coalición dependerá del digrafo y de los dividendos en el juego generalizado original de cada una de sus subcoaliciones ordenadas. Como concepto de solución (o regla de reparto) para la situación de comunicación dirigida proponemos, como hizo Myerson para las situaciones de comunicación estándar, el valor de Shapley de este juego restringido, y le llamaremos valor de Myerson dirigido.

Myerson (1977, 1980) caracterizó axiomáticamente su valor, utilizando las propiedades de eficiencia en componentes y, o bien equidad, o bien contribuciones equilibradas. Extenderemos estas caracterizaciones al nuevo contexto más general. Probó también que su valor satisface *estabilidad*, en el sentido de que, si el juego TU original fuera superaditivo, eliminar una arista entre dos jugadores no incrementará el pago a ninguno de ellos. Veremos que, para que una propiedad de este tipo se mantenga en el caso de las situaciones de comunicación dirigidas (eliminando, obviamente, un arco en lugar de una arista), no basta con imponer que el juego generalizado subyacente sea superaditivo, sino que es necesario ir más allá e imponerle una condición más restrictiva: que sea casi-positivo [2].

El resto del capítulo se organiza como sigue: algunos preliminares sobre juegos generalizados y grafos dirigidos aparecen en la Sección 2; en la 3 describimos el modelo de conexión en digrafos que nos permitirá determinar las coaliciones factibles y definir el juego restringido, y proponemos a continuación un valor para estas situaciones de comunicación dirigidas, que llamaremos también valor de Myerson, puesto que extiende el valor de Myerson clásico; en la Sección 4 presentamos dos caracterizaciones axiomáticas del citado valor, y la Sección 5 cierra el capítulo con algunas observaciones finales, en la primera de las cuales se pone de manifiesto, por medio de un ejemplo, que, como se ha mencionado, la propiedad de estabilidad de Myerson no se traslada sin más a este contexto ampliado.

4.2. Preliminares

4.2.1. Juegos y juegos generalizados

En muchas situaciones sociales o económicas, la formación de coaliciones es un proceso en el que no sólo es relevante qué jugadores se incorporan a una determinada coalición, sino también el orden en que lo hacen. Partiendo de esta idea, Nowak y Radzik (1994) introdujeron el concepto de *juego en forma de función característica generalizada.*

Para cada coalición $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, sea $\pi(S)$ el conjunto de todas las permutaciones de los ju-

[2] Sobre las definiciones de juego superaditivo y juego casi-positivo en el caso de los juegos generalizados, se hace alguna puntualización en la última sección de este capítulo.

gadores de S. Por convenio, haremos $\pi(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Llamaremos $\Omega(N) = \{T \in \pi(S) \mid S \subset N\}$ al conjunto de todas las coaliciones ordenadas de jugadores de N. Dada una coalición ordenada $T \in \Omega(N)$, existe una coalición $S \subset N$ tal que $T \in \pi(S)$. Sean entonces $H(T) = S$ el conjunto de los jugadores en la coalición ordenada T, y $t = |H(T)|$.

Un *juego en forma de función característica generalizada* es un par (N, v), en el que N es el conjunto de jugadores y v una función real (la función característica generalizada), definida en $\Omega(N)$ y que satisface $v(\emptyset) = 0$. En lo que sigue, y por brevedad, nos referiremos habitualmente a estos juegos como *juegos generalizados*.

Para cada $S \subset N$, y para cada coalición ordenada $T \in \pi(S)$, $v(T)$ representa las posibilidades económicas de los jugadores de S si estos se incorporan a la coalición siguiendo el orden dado por T. Cuando no haya ambigüedad con respecto al conjunto de jugadores N, identificaremos el juego generalizado (N, v) con su función característica generalizada v.

Notaremos $\mathcal{G}^N$ el conjunto de todos los juegos generalizados con conjunto de jugadores N. Con la suma y el producto por números reales definidos de la forma natural, $\mathcal{G}^N$, como G^N, tiene estructura de espacio vectorial. Su dimensión será $|\Omega(N)| - 1$. Obsérvese que existe un isomorfismo entre el espacio vectorial G^N de los juegos TU clásicos y el subespacio de $\mathcal{G}^N$ formado por todos los juegos generalizados para los que $v(T) = v(R)$ si $H(T) = H(R)$. Intuitivamente, para los juegos de G^N, el orden en que se forme la coalición es irrelevante. Así, en ocasiones identificaremos cada juego $v \in G^N$ con su juego imagen en $\mathcal{G}^N$ por el isomorfismo citado, que notaremos $\hat{v}$ y estará definido:

$$\hat{v}(T) = v(H(T)), \qquad \text{para todo } \; T \in \Omega(N). \tag{4.1}$$

Cada coalición ordenada $T = (i_1, \ldots, i_t) \in \Omega(N)$ establece un orden lineal estricto $\prec_T$ en $H(T)$, definido como sigue: para cualesquiera $i, j \in H(T)$, $i \prec_T j$ (i *precede* a j en T) si y sólo si existen $k, l \in \{1, \ldots, t\}$, con $k < l$, y tales que $i = i_k$, $j = i_l$.

A partir de esta relación de orden, podemos definir una relación de inclusión en el conjunto

$\Omega(N)$ de las coaliciones ordenadas de jugadores de N. Dadas dos coaliciones ordenadas $T, R \in \Omega(N)$, diremos que T está *contenida (ordenadamente)* en R y notaremos $T\tilde{\subset}R$ si y sólo si:

a) $H(T) \subset H(R)$, y

b) Para todos $\quad i \text{ y } j \in H(T), \quad i \prec_T j \quad$ implica que $\quad i \prec_R j$.

Ejemplo 4.1 *Dados* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*, y las coaliciones ordenadas* $T = (3, 1)$*,* $R = (2, 3, 4, 1)$ *y* $P = (4, 1, 2, 3)$*, se cumple que* $T\tilde{\subset}R$*, pero no que* $T\tilde{\subset}P$*, pues* $3 \prec_T 1$ *y* $1 \prec_P 3$.

En este trabajo se utilizará a menudo un base especial de $\mathcal{G}^N$, *la base de unanimidad generalizada*, formada por *los juegos de unanimidad generalizados* $\{w_T\}_{\emptyset\neq T\in\Omega(N)}$. Para cada $T \in \Omega(N) \setminus \{\emptyset\}$, la función característica generalizada w_T se define como sigue:

$$\text{para todo } R \in \Omega(N), \quad w_T(R) = \begin{cases} 1, & si \;\; T\tilde{\subset}R \\ 0, & en \;\; otro \;\; caso. \end{cases}$$

Los juegos $\{\hat{u}_S\}_{\emptyset\neq S\subset N}$, transformados de los juegos de la base de unanimidad clásicos $\{u_S\}_{\emptyset\neq S\subset N}$ de G^N, pueden expresarse fácilmente en términos de los $\{w_T\}_{\emptyset\neq T\in\Omega(N)}$ de la forma siguiente:

$$\hat{u}_S = \sum_{T\in\pi(S)} w_T, \qquad \text{para cada } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}.$$

Para un juego $v \in \mathcal{G}^N$ dado, $\{\Delta_v^*(T)\}_{\emptyset\neq T\in\Omega(N)}$ es el conjunto de los coeficientes de unanimidad generalizados de v (las coordenadas de v en la base de unanimidad generalizada). Sánchez y Bergantiños (1997) probaron que, para todo $T \in \Omega(N) \setminus \{\emptyset\}$:

$$\Delta_v^*(T) = \sum_{R\tilde{\subset}T} (-1)^{t-r} v(R). \tag{4.2}$$

En su trabajo seminal sobre juegos en forma de función característica generalizada, Nowak y Radzik (1994) definieron un valor para estos juegos que generaliza el valor de Shapley para juegos TU, y dieron una caracterización axiomática del mismo. Posteriormente, Sánchez y Bergantiños (1997) propusieron una extensión distinta, que también caracterizaron axiomáticamente, del valor de Shapley clásico para esta clase de juegos generalizados. En van den Brink et al. (2008) se discute una clase de reglas de reparto que incluye como casos particulares las dos previamente citadas.

Por último, dado un juego $v \in \mathcal{G}^N$, se define el *juego promedio* $\overline{v} \in G^N$:

$$\overline{v}(S) = \frac{1}{s!} \sum_{T \in \pi(S)} v(T), \qquad \textit{para todo } S \subset N. \tag{4.3}$$

4.2.2. Grafos y grafos dirigidos

Como en capítulos anteriores, dado un grafo (N, γ) diremos que dos nodos i y j *están conectados* en γ si es posible unirlos a través de una sucesión de aristas de γ (es decir, si son *conectables* en γ). Pero en este capítulo, para ser consecuentes con lo que haremos en el caso de los digrafos, dados un grafo (N, γ) y un subconjunto S de N, diremos que S es *conexo* en (N, γ) si todo par i y j de nodos de S se pueden unir utilizando una sucesión de aristas de γ (que, eventualmente, involucrará a nodos que no pertenezcan a S). Lo que, de nuevo, equivale a decir que S sea conectable en γ. Nótese que este concepto de conexión para coaliciones es sustancialmente distinto del de Myerson (1977), que es el utilizado hasta aquí, y según el cual una coalición S es conexa en el grafo (N, γ) si todo par de nodos de S pueden unirse por un camino que utilice sólo nodos de S, es decir, por una sucesión de aristas de $\gamma_{|S}$ [3].

De nuevo, dado un grafo (N, γ), esta noción de conectividad induce una partición de N

[3] En otros términos, hemos venido llamando conexos a los conjuntos *conectados* y, en este capítulo, vamos a llamárselo a los conjuntos *conectables*. En relación a los diversos usos del término "conexo", ver también la nota a pie de página 5, en la sección dedicada a los grafos en el Capítulo 1 de este trabajo.

en *componentes conexas.* Dos nodos i y j, $i \neq j$, están en la misma componente conexa si y sólo si están conectados. Nótese que, a pesar de que nuestra noción de conectividad sea diferente de la de Myerson, da lugar a las mismas componentes en un grafo. N/γ denotará, como hasta ahora, el conjunto de todas las componentes conexas de N en γ y, más en general, para cada $S \subset N$, S/γ es el conjunto de todas las componentes conexas en el grafo parcial $(S, \gamma_{|_S})$.

Dado un grafo (N, γ) y un subconjunto $S \subset N$, notaremos:

$$\mathcal{P}^{\gamma}(S) = \{U \subset S \mid U \neq \emptyset \text{ } y \text{ } U \text{ } conexo \text{ } en \text{ } (S, \gamma|_S)\}$$

la clase de los conexos en $(S, \gamma_{|_S})$, que estará formada por las componentes conexas del grafo parcial $(S, \gamma_{|_S})$ y sus subconjuntos propios. En particular, y con la noción de conexión que manejamos en este capítulo, resulta, para toda coalición $S \subset N$ y para toda componente $C \in S/\gamma$, $\mathcal{P}^{\gamma}(C) = 2^C \setminus \{\emptyset\}$.

Ejemplo 4.2 *Dados* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y el grafo* $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$*, serán:*

$N/\gamma = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$, $\mathcal{P}^{\gamma}(N) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ *y, para* $C_1 = \{1, 2, 3\}$*, por ejemplo,* $P^{\gamma}(C_1) = 2^{\{1,2,3\}} \setminus \{\emptyset\}$.

Nótese que el conjunto $S = \{1, 3\}$*, que aquí consideramos conexo en* (N, γ)*, no lo sería si nos mantuviéramos fieles al concepto de conexión para coaliciones de Myerson.*

Grafos dirigidos

Un *grafo dirigido o digrafo* es un par (N, d), en el que $N = \{1, 2, \dots n\}$ es un conjunto de nodos y d un subconjunto del conjunto de todos los pares ordenados (i, j), $i \neq j$, de elementos de N. Llamaremos *arco* a cada par $(i, j) \in d$. En lo que sigue, cuando no haya ambigüedad con respecto a N, nos referiremos al digrafo (N, d) como d. Notaremos D^N el conjunto de todos los posibles digrafos con conjunto de nodos N.

Dado un digrafo (N, d), diremos que el nodo i está *directamente conectado* o que puede comunicar directamente con el nodo j si $(i, j) \in d$. Obviamente, en este contexto, la relación no es simétrica; si i está directamente conectado con j, el recíproco no es necesariamente cierto. Si i no está directamente conectado con j en el digrafo, quizá sea posible conectarlos a pesar de todo, supuesto que haya otros nodos por medio de los cuales podamos hacerlo. Diremos que i está *conectado* con j (o que puede comunicar con j) en el digrafo (N, d) si existe un *camino dirigido* que los conecta, es decir, si existe una sucesión ordenada de nodos de N, $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$, tales que $i_1 = i$, $i_s = j$ y $(i_l, i_{l+1}) \in d$ para todo $l \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$. Obviamente también, la relación "estar conectado con" es transitiva: si i está conectado con j y j está conectado con k, i estará también conectado con k. En un sentido más laxo, diremos que los nodos i y j *están conectados* en el digrafo (N, d) si i está conectado con j ó j está conectado con i (o ambos, por supuesto).

Para todo $S \subset N$, se define de forma natural el *digrafo parcial* $(S, d|_S)$, donde:

$$d|_S = \{(i,j) \in d \mid i,j \in S\}.$$

Por analogía con la notación que empleamos en el caso de los grafos, dados un digrafo (N, d) y un nodo $k \in N$, notaremos (N, d_{-k}) el digrafo que resulta de eliminar en el digrafo d los arcos incidentes en el nodo k, es decir: $d_{-k} = \{(i,j) \in d \mid k \notin \{i,j\}\}$.

Dado un digrafo $(N, d) \in D^N$, llamaremos *grafo inducido por* d y notaremos $(N, \gamma(d))$ al grafo de Γ^N definido:

$$\gamma(d) = \{\{i,j\} \text{ tales que } i,j \in N, \ \ e \ \ (i,j) \in d \text{ ó } (j,i) \in d\}.$$

Un grafo dirigido (N, d) diremos que es *conexo* si para cualesquiera dos nodos i y $j \in N$ existe un camino no dirigido que los conecta [4]. En otras palabras, si el grafo inducido $\gamma(d)$ es conexo.

[4] Esta es la definición de conexión para grafos dirigidos habitual en teoría de grafos (ver, por ejemplo, Yellen (2004)). En un reciente trabajo con el título de "Conectividad y reglas de reparto en un grafo dirigido", Kim y Jun (2008) dicen de un tal digrafo que es *(simplemente) conexo*. Definen un digrafo *fuertemente conexo* como aquel en el que, para cualesquiera i y $j \in N$, existe un camino dirigido de i a j. Por último, dicen que un digrafo (N, d) es *débilmente conexo* si existe un nodo $i_0 \in N$ tal que, para cualquier otro nodo $i \in N$, i puede comunicar con i_0. De las definiciones previas se sigue fácilmente que una red dirigida fuertemente conexa es débilmente conexa, y una débilmente conexa es (simplemente) conexa.

Un subconjunto (no ordenado) $S \subset N$ será *conexo* en el digrafo (N, d) si el digrafo parcial $(S, d|_S)$ es conexo. Un subconjunto (no ordenado) $C \subset N$ es una *componente* en el digrafo (N, d) si $C \in N/\gamma(d)$, es decir, si es una componente conexa en el grafo $(N, \gamma(d))$. O, en otros términos, si el digrafo parcial $(C, d|_C)$ es conexo y maximal en (N, d), en el sentido de que, para todo subconjunto $S \subset N$, con $C \subsetneq S$, el digrafo parcial $(S, d|_S)$ no es conexo. Así, cada digrafo $(N, d) \in D^N$ determina una partición de N en componentes. Notaremos N/d el conjunto de todos los componentes del grafo dirigido (N, d). Obviamente, $N/d = N/\gamma(d)$.

4.3. El modelo

En el apartado anterior se ha tratado con algún detalle el concepto de conexión en digrafos. Se ha definido primero lo que era un digrafo conexo, para pasar luego a considerar las componentes (conexas) en un digrafo que, como en el caso de los grafos, son conjuntos (no ordenados) de nodos, conexos en el digrafo y maximales. Ahora nos interesa tratar un asunto muy relacionado con los anteriores: cuándo una coalición ordenada es conexa en un grafo dirigido.

4.3.1. Coaliciones ordenadas conexas en digrafos

En lo que sigue, es de especial relevancia la interpretación que demos a la forma en que un grafo dirigido impone restricciones a las posibilidades de comunicación o de conexión de los nodos; es decir, cuáles sean los conjuntos ordenados conexos en un digrafo. Como se anunciaba en la introducción, varias alternativas son posibles.

Por ejemplo, en Amer, Giménez y Magaña (2007) se considera un conjunto ordenado conexo sólo si cada nodo está directamente conectado con su inmediato sucesor. Nuestra elección es distinta, pero los objetivos también lo son.

Definición 4.1 *Diremos que un conjunto ordenado* $T = (i_1, i_2, \ldots, i_t) \in \Omega(N)$ *es conexo en el digrafo* (N, d) *si, para todo* $l = 1, \ldots, t-1$, i_l *está conectado (no necesariamente directamente conectado) con* i_{l+1} *en el digrafo* (N, d).

Como consecuencia de esta definición, y por la ya mencionada transitividad de la relación "estar conectado con" en digrafos, si $T \in \Omega(N)$ es conexo en el digrafo (N, d) entonces, para cada $l = 1, \ldots, t-1$ y para todo $m = l+1, \ldots, t$, el nodo i_l estará también conectado con i_m. Por otro lado, y también como consecuencia de la definición, si T es conexo en (N, d), y $R \widetilde{\subset} T$, entonces R es también conexo en (N, d).

Para cada subconjunto $S \subset N$, notaremos:

$$\Omega^d(S) = \{T \in \Omega(S) \mid T \textit{ conexo en } (S, d|_S)\}$$

la clase de las coaliciones ordenadas conexas en $(S, d|_S)$. Obsérvese que, dados $C \in N/d$ y $T \in \Omega(C)$, es posible que T no sea conexo en (N, d), es decir, que $T \notin \Omega^d(S)$.

Ejemplo 4.3 *Sean* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $d = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$, *como en la Fig. 4.1. En este caso:*

i) Las coaliciones ordenadas $T = (1, 2, 4)$ *y* $R = (1, 3, 2, 4)$ *son conexas en* (N, d), *pero* $O = (1, 4, 3)$ *no lo es, pues* 4 *no está conectado con* 3.

ii) $\gamma(d) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, *y* $N/d = N/\gamma(d) = \{N\}$.

iii) Dado $S = \{1, 2, 4\} \subset N$, *resultan:* $d|_S = \{(1, 2)\}$, $S/d = S/\gamma(d) = \{\{1, 2\}, \{4\}\}$, $\Omega^d(S) = \Omega^{d|_S}(S) = \{(1), (2), (4), (1, 2)\}$ *y* $\gamma(d|_S) = \gamma(d)|_S = \{\{1, 2\}\}$.

iv) $T' = (1, 4, 2)$ *es, como* T, *una permutación de* S, *pero, a diferencia de* T, *no es conexa en* (N, d).

Figura 4.1: Digrafo en el Ejemplo 4.3

Dado el grafo $(N,\gamma) \in \Gamma^N$, notaremos $(N, d(\gamma))$ el *digrafo asociado*, que contiene, para cada arista $\{i,j\} \in \gamma$, los dos arcos (i,j) y (j,i). La aplicación que, a cada grafo (N,γ) le hace corresponder el digrafo $(N, d(\gamma))$ es una biyección entre Γ^N y su conjunto imagen en D^N. En este sentido, Γ^N es un subconjunto de D^N, y cada grafo puede identificarse con un digrafo particular.

Obsérvese que, para cada grafo $(N,\gamma) \in \Gamma^N$ y para cada componente conexa $C \in N/\gamma$:

$$\Omega^{d(\gamma)}(C) = \Omega(C),$$

esto es, todos los subconjuntos ordenados $T \in \pi(S)$ con $S \subset C$ son conexos en el digrafo $(N, d(\gamma))$.

4.3.2. Situaciones de comunicación dirigidas

Una *situación de comunicación dirigida*[5] (o situación de comunicación con un digrafo) es una terna (N,v,d), en la que $(N,v) \in \mathcal{G}^N$ es un juego TU generalizado y $(N,d) \in D^N$ es un grafo dirigido. No se supone ninguna relación particular entre el juego v y el digrafo d mas allá del hecho de que los nodos del digrafo sean los jugadores del juego. Esta definición generaliza la clásica de una situación de comunicación (N,v,γ), en la que $(N,v) \in G^N$ es un juego TU estándar y $(N,\gamma) \in \Gamma^N$ un grafo no dirigido. Notaremos $\mathcal{DCS}^N$ la clase de todas las situaciones de comunicación dirigidas con conjunto de jugadores N, y sea $\mathcal{DCS}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{DCS}^N$.

Podemos asociar a cada situación de comunicación dirigida (N,v,d) un juego TU clásico $(N,v^d) \in G^N$ que refleje tanto los posibles beneficios que se deriven de la cooperación (y que estarán a su vez determinados por el orden coalicional), dados por el juego generalizado (N,v), como las restricciones en la comunicación representadas por el digrafo (N,d).

[5] Como vimos en la introducción del presente capítulo, esta denominación se utiliza en Slikker y van den Nouweland (2001) con un significado distinto. A pesar de ello, hemos preferido mantenerla con el fin de poner énfasis en el objetivo de generalizar el concepto clásico de situación de comunicación a este nuevo contexto con grafos dirigidos y juegos generalizados.

Con el objetivo de que la definición del juego restringido (N, v^d) resulte mas fácilmente comprensible, recordemos en primer lugar la idea del juego con restricciones en las comunicaciones introducido por Myerson (1977) que, para cada situación de comunicación $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, definió la función característica del juego restringido $v^\gamma \in G^N$ del modo siguiente:

$$v^\gamma(S) = \sum_{C \in S/\gamma} v(C), \quad \textit{para todo } S \subset N,$$

que puede reescribirse en términos de los coeficientes de unanimidad del juego (N, v) como sigue:

$$v^\gamma(S) = \sum_{U \in \mathcal{P}^\gamma(S)} \Delta_v(U) = \sum_{R \in \Omega^{d(\gamma)}(S)} \frac{1}{r!} \, \Delta_v(H(R)). \tag{4.4}$$

La primera de las igualdades en (4.4) se satisface porque: (i) para toda componente conexa $C \in S/\gamma$, $\mathcal{P}^\gamma(C) = 2^C \backslash \{\emptyset\}$ (es decir, todos los subconjuntos no vacíos de una componente C son conexos en (N, γ)) y, (ii) $\{\mathcal{P}^\gamma(C)\}_{C \in S/\gamma}$ es una partición de $\mathcal{P}^\gamma(S)$. Así:

$$v^\gamma(S) = \sum_{C \in S/\gamma} \sum_{\emptyset \neq U \subset C} \Delta_v(U) = \sum_{C \in S/\gamma} \sum_{U \in \mathcal{P}^\gamma(C)} \Delta_v(U) = \sum_{U \in \mathcal{P}^\gamma(S)} \Delta_v(U).$$

La segunda y última de las igualdades en (4.4) se satisface porque las coaliciones ordenadas conexas en el digrafo inducido $(N, d(\gamma))$ son todas y sólo las permutaciones de las coaliciones (no ordenadas) conexas en el grafo (N, γ). Es decir, $R \in \Omega^{d(\gamma)}(S)$ si y sólo si $U = H(R) \in \mathcal{P}^\gamma(S)$. Además, dada una coalición $U \in \mathcal{P}^\gamma(S)$, para cada una de las $r!$ coaliciones ordenadas $R \in \pi(U)$, es obviamente $\Delta_v(H(R)) = \Delta_v(U)$.

El juego (generalizado) restringido al digrafo

Dada una situación de comunicación dirigida $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$, y extendiendo al nuevo contexto las ideas del punto anterior, obtendremos la función característica del *juego restringido al digrafo* $(N, v^d) \in G^N$. Supongamos que en (N, v, d) cada coalición S puede obtener sólo los coeficientes de unanimidad $\Delta_v^*(R)$ de aquellas subcoaliciones ordenadas $R \in \Omega(S)$ que sean conexas en el digrafo parcial $(S, d|_S)$. Así, definimos:

$$v^d(S) = \sum_{R \in \Omega^d(S)} \frac{1}{r!} \Delta_v^*(R), \quad \textit{para todo } S \subset N,$$

casi como en (4.4), pero aquí v es un juego generalizado y, en lugar del grafo γ, aparece el digrafo d, aunque v^d sea de nuevo un juego TU clásico, como lo es v^γ en (4.4).

Podemos considerar que $v^d(S)$ es el dividendo esperado por el conjunto de todas las subcoaliciones de S. Para cada una de estas subcoaliciones $U \subset S$, dicha esperanza se calcula sobre el conjunto de sus permutaciones $R \in \pi(U)$ como el promedio de las $r!$ cantidades:

$$\begin{cases} \Delta_v^*(R), & \textit{si} \;\; R \in \pi(U) \cap \Omega^d(S) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como, para cada $S \subset N$, se tiene que $\Omega^d(S) = \bigcup_{C \in S/d} \Omega^d(C)$, podemos reescribir la definición previa como sigue:

$$v^d(S) = \sum_{C \in S/d} v^d(C) = \sum_{C \in S/d} \sum_{R \in \Omega^d(C)} \frac{1}{r!} \Delta_v^*(R), \qquad \text{para todo } S \subset N.$$

En la proposición siguiente, dado $S \subset N$, obtenemos una expresión distinta para $v^d(S)$, que puede considerarse como una definición alternativa del juego restringido, y que establece un relación directa entre las funciones características de los juegos $v \in \mathcal{G}^N$ y $v^d \in G^N$.

Proposición 4.1 *Sea $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$. Entonces, la función característica del juego (N, v^d) resulta:*

$$v^d(S) = \sum_{C \in S/d} \sum_{R \in \Omega^d(C)} \lambda^d(R) v(R), \quad \textit{para cada } S \subset N, \tag{4.5}$$

donde, para cada $R \in \Omega^d(C)$, $\lambda^d(R) = \sum_{T \in \Omega^d(C),\ T \tilde{\supset} R} \frac{(-1)^{t-r}}{t!}$.

Demostración: De la definición del juego v^d y de la Ecuación 4.2, se tiene:

$$v^d(S) = \sum_{C \in S/d} \sum_{T \in \Omega^d(C)} \frac{\Delta_v^*(T)}{t!} =$$

$$= \sum_{C \in S/d} \sum_{T \in \Omega^d(C)} \sum_{T \tilde{\supset} R} \frac{(-1)^{t-r}}{t!} v(R) = \sum_{C \in S/d} \sum_{R \in \Omega^d(C)} \lambda^d(R) v(R).$$

□

Probaremos a continuación que, si nos restringimos a aquellas situaciones de comunicación dirigidas en las que el juego es (equivalente a) un juego TU estándar y el digrafo es (equivalente a) un grafo, entonces el juego restringido (al digrafo) definido es precisamente el juego de Myerson. Para ello, vamos a obtener primero la expresión del juego restringido cuando, en la situación de comunicación dirigida, el digrafo es un grafo, pero el juego es un juego generalizado arbitrario.

Proposición 4.2 *Sean (N, γ) un grafo en Γ^N y $(N, v) \in \mathcal{G}^N$ un juego generalizado, y consideremos la situación de comunicación dirigida $(N, v, d(\gamma)) \in \mathcal{DCS}^N$. Entonces, para todo $S \subset N$:*

$$v^{d(\gamma)}(S) = \sum_{C \in S/d(\gamma)} \sum_{R \in \pi(C)} \frac{v(R)}{r!} = \overline{v}^\gamma(S), \tag{4.6}$$

donde $\overline{v}$ es el juego promedio, definido en (4.3).

Demostración: De la Proposición 4.1 se sigue que, para todo $S \subset N$:

$$v^{d(\gamma)}(S) = \sum_{C \in S/d(\gamma)} \sum_{R \in \Omega^{d(\gamma)}(C)} \lambda^{d(\gamma)}(R) v(R).$$

Como (N, γ) es un grafo, para toda $C \in S/d(\gamma)$ será $\Omega^{d(\gamma)}(C) = \Omega(C)$. Además, es obvio que, para toda $C \in S/d(\gamma)$ y para toda permutación $R \in \pi(C)$: $\lambda^{d(\gamma)}(R) = \frac{1}{r!}$.

Por otra parte, si $R \in \Omega(C) \setminus \pi(C)$, es decir, si $H(R) \subsetneq C$, tendremos:

$$\lambda^{d(\gamma)}(R) = \sum_{T\in\Omega(C),\ T\tilde{\supset}R} \frac{(-1)^{t-r}}{t!} = \sum_{m=0}^{c-r} \binom{c-r}{m}\binom{r+m}{m} m! \frac{(-1)^{r+m-r}}{(r+m)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{c-r} \binom{c-r}{m} \frac{1}{r!}(-1)^m = 0.$$

Por tanto, para todo $S \subset N$:

$$v^{d(\gamma)}(S) = \sum_{C\in S/d(\gamma)} \sum_{R\in\pi(C)} \frac{v(R)}{r!}.$$

La última igualdad en (4.6) se sigue trivialmente de las definiciones del juego promedio $\overline{v}$ y del juego restringido al grafo v^γ, y de ser $S/d(\gamma) = S/\gamma$ para todo $S \subset N$. □

La siguiente proposición nos da la expresión particular de la función característica del juego restringido (N, v^d) para aquellas situaciones de comunicación dirigidas en las que el digrafo es un grafo y el juego generalizado es un juego TU clásico.

Proposición 4.3 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y consideremos la situación de comunicación dirigida "equivalente" $(N, \hat{v}, d(\gamma))$. Entonces:*

$$\hat{v}^{d(\gamma)} = v^\gamma.$$

Demostración: Dado $v \in G^N$, se definió el juego $\hat{v} \in \mathcal{G}^N$ del modo: $\hat{v}(R) = v(H(R))$ para todo $R \in \Omega(N)$ (ver Ecuación 4.1). De la Proposición 4.2 se sigue que $\hat{v}^{d(\gamma)} = \left(\overline{\hat{v}}\right)^\gamma$. Por último, es obvio que, para todo juego $v \in G^N$, $\overline{\hat{v}} = v$. □

4.3.3. Reglas de reparto para situaciones de comunicación dirigidas. El valor de Myerson para digrafos

Una *regla de reparto* definida en una clase $\mathcal{DCS} \subset \mathcal{DCS}^\infty$ de situaciones de comunicación dirigidas es simplemente una función Ψ que asigna un vector de pagos $\Psi(N, v, d) \in I\!R^n$ a cada situación de comunicación dirigida (N, v, d) en la clase $\mathcal{DCS}$.

Podrían obtenerse en principio diferentes reglas de reparto aplicando diferentes conceptos de solución al juego inducido (N, v^d). En este trabajo, nos ceñiremos a Sh, el valor de Shapley. Recuérdese que, para situaciones de comunicación estándar $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, el valor de Shapley del juego restringido al grafo (N, v^γ) se conoce como el valor de Myerson. De la última proposición del apartado anterior se sigue que, dada una situación de comunicación dirigida $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$, el valor de Shapley de (N, v^d) es una extension natural del valor de Myerson para estas situaciones de comunicación dirigidas. Proponemos por tanto la siguiente definición.

Definición 4.2 *El valor de Myerson para situaciones de comunicación dirigidas (en adelante, el valor de Myerson para digrafos) es la regla de reparto μ definida como sigue:*

$$\mu(N, v, d) = Sh(N, v^d), \quad \textit{para toda } (N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N.$$

La primera propiedad de esta regla de reparto que estudiaremos es la aditividad (con respecto al juego), que definimos de la forma natural.

Definición 4.3 *Una regla de reparto $\Psi : \mathcal{DCS}^N \longrightarrow I\!R^n$ es aditiva si, para todas (N, v, d) y $(N, w, d) \in \mathcal{DCS}^N$, se satisface que:*

$$\Psi(N, v + w, d) = \Psi(N, v, d) + \Psi(N, w, d).$$

Proposición 4.4 *El valor de Myerson para digrafos satisface aditividad.*

Demostración: Es inmediata, teniendo en cuenta la aditividad del valor de Shapley y el hecho de que, si (N, v, d) y $(N, w, d) \in \mathcal{DCS}^N$, entonces $(v + w)^d = v^d + w^d$ (es decir, la aditividad -respecto al juego- de la aplicación que, dado el digrafo d, hace corresponder a cada juego generalizado v el juego restringido al digrafo v^d). $\square$

El siguiente ejemplo, que hace uso de la propiedad de aditividad, pone también de manifiesto que el considerar situaciones de comunicación dirigidas en lugar de situaciones de comunicación estándar puede cambiar en ciertos casos no solamente la cantidad total a repartir, sino también las proporciones en que esta se reparte a los jugadores.

Ejemplo 4.4 *Sean* $N = \{1,2,3,4\}$ *y* $d = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4)\}$, *como en la Fig. 4.2, y* v *el juego de los mensajes en* $\mathcal{G}^N$, *definido:*

$$v = \sum_{i,j \in N,\ i \neq j} w_{(i,j)} = \sum_{i,j \in N,\ i<j} \hat{u}_{\{i,j\}}.$$

Figura 4.2: Digrafo en el Ejemplo 4.4

Teniendo en cuenta que $v^d = \sum_{i,j \in N,\ i \neq j} w^d_{(i,j)}$, *y que*

$$w^d_{(i,j)} = \begin{cases} \frac{1}{2!} u_{\{i,j\}}, & si\ (i,j) \in d \\ \frac{1}{2!}\left[u_{\{1,2,4\}} + u_{\{1,3,4\}} - u_{\{1,2,3,4\}}\right], & si\ (i,j) = (1,4) \\ 0, & en\ \ otro\ \ caso, \end{cases}$$

tenemos:

$$\mu(N,v,d) = Sh(N,v^d) = \sum_{i,j \in N,\ i \neq j} Sh(N, w^d_{(i,j)}) = \frac{1}{2!}[Sh(N,u_{\{1,2\}}) + Sh(N,u_{\{1,3\}}) +$$

$$+ Sh(N,u_{\{2,4\}}) + Sh(N,u_{\{3,4\}}) + Sh(N,u_{\{1,2,4\}}) + Sh(N,u_{\{1,3,4\}}) - Sh(N,u_{\{1,2,3,4\}})] =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right) + \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{17}{24},\frac{13}{24},\frac{13}{24},\frac{17}{24}\right),$$

mientras que si, en lugar de la situación de comunicación dirigida (N,v,d), hubiéramos considerado la situación de comunicación estándar $(N, \overline{v}, \gamma(d))$*, donde* $\overline{v} = \sum_{i,j \in N,\ i \neq j} u_{\{i,j\}}$ *es el juego de los mensajes en* G^N*, habríamos obtenido:*

$$\mu(N, \overline{v}, \gamma(d)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

4.4. Dos caracterizaciones del valor de Myerson para digrafos

Esta sección se dedica a la presentación de dos caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson para digrafos paralelas a las que dio Myerson (1977, 1980) de su valor para situaciones de comunicación clásicas. Estas caracterizaciones se basan en tres propiedades: *eficiencia en componentes, equidad* y *contribuciones equilibradas*, que son las extensiones naturales de las propiedades correspondientes en el modelo clásico.

Una regla de reparto para situaciones de comunicación dirigidas satisface la propiedad de eficiencia en componentes si el pago total a los jugadores integrantes de una componente conexa es precisamente la cantidad que dichos jugadores, considerados ahora como una coalición, podrían obtener dadas las restricciones en la cooperación impuestas por el digrafo. Formalmente:

Definición 4.4 *Una regla de reparto* $\Psi : \mathcal{DCS}^N \to I\!R^n$ *es eficiente en componentes si, para toda* $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ *y toda* $C \in N/d$*:*

$$\sum_{i \in C} \Psi_i(N, v, d) = v^d(C).$$

Observación 4.1 *La definición previa, como se adelantó, extiende la clásica para situaciones de comunicación estándar, como se sigue del hecho de que, si* $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$*, entonces* $v^\gamma(C) = v(C)$ *para toda* $C \in N/\gamma$*.*

La propiedad de equidad para situaciones de comunicación dirigidas establece que, si desaparece la posibilidad de comunicación directa (y dirigida) entre el jugador i y el jugador j, manteniéndose igual lo demás, es decir, si se modifica el digrafo original d eliminando del mismo el arco $a = (i, j)$, ambos jugadores deben ver modificados sus pagos respectivos en la misma cantidad.

Definición 4.5 *Una regla de reparto $\Psi : \mathcal{DCS}^N \to I\!R^n$ es equitativa si, para toda situación de comunicación dirigida $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ y para todo arco $(i, j) \in d$:*

$$\Psi_i(N, v, d) - \Psi_i(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) = \Psi_j(N, v, d) - \Psi_j(N, v, d \setminus \{(i, j)\}).$$

Observación 4.2 *La definición de equidad para reglas de reparto en situaciones de comunicación estándar se puede obtener aplicando la anterior en un proceso de dos pasos, ya que cada arista $\{i, j\}$ en un grafo γ puede considerarse como un par de arcos, (i, j) y (j, i), en el digrafo asociado $d(\gamma)$. Nótese que, a pesar de ello, la equidad tal y como se acaba de definir es más fuerte que la propiedad que se necesitaría para tener equidad en el sentido de Myerson en el contexto de las situaciones de comunicación dirigidas cuando se eliminaran al tiempo los dos arcos (i, j) y (j, i).*

Probaremos a continuación que las dos propiedades anteriores caracterizan el valor de Myerson para digrafos.

Teorema 4.1 *El valor de Myerson para digrafos, μ, es la única regla de reparto definida en $\mathcal{DCS}^N$ que satisface eficiencia en componentes y equidad.*

Demostración: Probaremos en primer lugar que satisface eficiencia en componentes. Sean $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ y $C \in N/d$. Entonces:

$$\sum_{i \in C} \mu_i(N, v, d) = \sum_{i \in C} \mu_i(C, v|_C, d|_C) = \sum_{i \in C} Sh_i\left(C, (v|_C)^{d|_C}\right) =$$

$$= \sum_{i \in C} Sh_i\left(C, (v|_C)^d\right) = v^d(C),$$

donde la primera igualdad se debe a la descomponibilidad en componentes del valor de Myerson para digrafos (una propiedad que no hemos probado, pero cuya demostración resulta trivial), y la última se satisface por la eficiencia del valor de Shapley.

A continuación probaremos que el valor de Myerson para digrafos satisface equidad. Sean $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ y dos jugadores $i, j \in N$ tales que $(i, j) \in d$. Entonces:

$$\mu_i(N, v, d) = Sh_i(N, v^d) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} \left[v^d(S \cup \{i\}) - v^d(S) \right] =$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(s+1)!(n-2-s)!}{n!} \left[v^d(S \cup \{i, j\}) - v^d(S \cup \{j\}) \right] +$$

$$+ \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} \left[v^d(S \cup \{i\}) - v^d(S) \right].$$

De la expresión anterior y de la simétrica a esta para $\mu_j(N, v, d)$, resulta que, al calcular la diferencia:

$$\mu_i(N, v, d) - \mu_j(N, v, d), \tag{4.7}$$

todos los términos en los que no aparecen los factores $v^d(S \cup \{i\})$ ó $v^d(S \cup \{j\})$ se cancelan; luego:

$$\mu_i(N, v, d) - \mu_j(N, v, d) =$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \left[\frac{s!(n-1-s)!}{n!} + \frac{(s+1)!(n-2-s)!}{n!} \right] \left[v^d(S \cup \{i\}) - v^d(S \cup \{j\}) \right] =$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-2-s)!}{(n-1)!} \left[v^d(S \cup \{i\}) - v^d(S \cup \{j\}) \right]. \tag{4.8}$$

Pero si $S \subset N \setminus \{i\}$ ó $S \subset N \setminus \{j\}$, entonces $v^d(S) = v^{d \setminus \{(i,j)\}}(S)$ y, por tanto, la diferencia en (4.7) coincide con:

$$\mu_i(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) - \mu_j(N, v, d \setminus \{(i, j)\}),$$

con lo que queda probada la equidad.

Lo que nos resta por probar es la unicidad. Es decir, que toda regla de reparto en $\mathcal{DCS}^N$ que satisfaga eficiencia en componentes y equidad debe coincidir con el valor de Myerson. Lo probaremos por inducción sobre el número de arcos del digrafo (N, d) [6]. Sea Ψ una regla de reparto en $\mathcal{DCS}^N$ que satisfaga eficiencia en componentes y equidad.

En primer lugar, consideremos una situación de comunicación dirigida en la que el digrafo no tenga arcos: $(N, v, \emptyset) \in \mathcal{DCS}^N$. En este caso, todos los nodos son aislados, y la eficiencia en componentes de Ψ y de μ implica que, para todo $i \in N$:

$$\Psi_i(N, v, \emptyset) = v^d(i) = v(i) = \mu_i(N, v, \emptyset).$$

Consideremos ahora una situación de comunicación $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ con un digrafo d cuyo número de arcos sea $|d| = k \geq 1$ y, por hipótesis de inducción, supongamos que Ψ y μ coinciden para situaciones de comunicación dirigidas con menos de k arcos. Utilizando esta hipótesis y la equidad de Ψ y de μ tenemos que, para cada arco $(i, j) \in d$:

$$\Psi_i(N, v, d) - \Psi_j(N, v, d) = \Psi_i(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) - \Psi_j(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) =$$

$$= \mu_i(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) - \mu_j(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) = \mu_i(N, v, d) - \mu_j(N, v, d),$$

y, por tanto:

$$\Psi_i(N, v, d) - \mu_i(N, v, d) = \Psi_j(N, v, d) - \mu_j(N, v, d).$$

Se sigue fácilmente que la última igualdad se sostiene para cualquier par de nodos i y j que estén en la misma componente conexa. Esto es así porque, incluso si dos nodos i y j en una misma componente C no están conectados en (N, d), habrá siempre una sucesión ordenada

[6] Recuérdese que Myerson (1977) probó la unicidad de su valor para situaciones de comunicación (estándar) por inducción sobre el número de aristas.

de nodos de C, $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$, tales que $i_1 = i$, $i_s = j$ y, para todo $l \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$, o bien $(i_l, i_{l+1}) \in d$, o bien $(i_{l+1}, i_l) \in d$. Por tanto, para cada componente $C \in N/d$, existe un número d_C tal que, para todo $i \in C$:

$$\Psi_i(N, v, d) - \mu_i(N, v, d) = d_C.$$

Utilizando la eficiencia en componentes de Ψ y de μ tenemos que, para cada componente $C \in N/d$,

$$\sum_{i \in C} \Psi_i(N, v, d) = \sum_{i \in C} \mu_i(N, v, d) = v^d(C).$$

Luego:

$$0 = \sum_{i \in C} \Psi_i(N, v, d) - \sum_{i \in C} \mu_i(N, v, d) = \sum_{i \in C} d_C = |C| d_C$$

y, por tanto, $d_C = 0$. En consecuencia, $\Psi_i(N, v, d) = \mu_i(N, v, d)$ para todo $i \in C$ y para cada $C \in N/d$, lo que cierra la demostración. $\square$

La propiedad de contribuciones equilibradas para situaciones de comunicación dirigidas establece, como en el caso de las situaciones de comunicación estándar, que el perjuicio que el aislamiento de un jugador i puede ocasionar a otro jugador j es el mismo que el perjuicio que el aislamiento de j puede causar a i. El siguiente resultado prueba que en el último teorema la equidad puede sustituirse por la propiedad de contribuciones equilibradas.

Definición 4.6 *Una regla de reparto $\Psi : \mathcal{DCS}^N \to I\!R^n$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si, para toda $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ y para todos $i, j \in N$:*

$$\Psi_j(N, v, d) - \Psi_j(N, v, d_{-i}) = \Psi_i(N, v, d) - \Psi_i(N, v, d_{-j}),$$

donde, recordemos, d_{-k} es el digrafo que resulta de eliminar en el digrafo d los arcos incidentes en el nodo k.

Teorema 4.2 *El valor de Myerson para digrafos, μ, es la única regla de reparto definida en $\mathcal{DCS}^N$ que satisface eficiencia en componentes y contribuciones equilibradas.*

Demostración: Ya quedó probado en el Teorema 4.1 que el valor de Myerson para digrafos satisface eficiencia en componentes.

Para probar ahora que satisface también contribuciones equilibradas, observemos que, si $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}^N$ e $i, j \in N$, entonces, para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$:

$$v^d(S \cup \{i\}) = v^{d_{-j}}(S \cup \{i\}), \quad v^d(S \cup \{j\}) = v^{d_{-i}}(S \cup \{j\}) \text{ y } \quad v^{d_{-j}}(S) = v^{d_{-i}}(S).$$

Por tanto, de (4.8) se sigue que:

$$\mu_i(N, v, d) - \mu_j(N, v, d) = \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-2-s)!}{(n-1)!} \left[v^{d_{-j}}(S \cup \{i\}) - v^{d_{-i}}(S \cup \{j\}) \right] =$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-2-s)!}{(n-1)!} \left[v^{d_{-j}}(S \cup \{i\}) - v^{d_{-j}}(S) + v^{d_{-i}}(S) - v^{d_{-i}}(S \cup \{j\}) \right] =$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-2-s)!}{(n-1)!} \left[v^{d_{-j}}(S \cup \{i\}) - v^{d_{-j}}(S) \right] -$$

$$- \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-2-s)!}{(n-1)!} \left[v^{d_{-i}}(S \cup \{j\}) - v^{d_{-i}}(S) \right] = \mu_i(N, v, d_{-j}) - \mu_j(N, v, d_{-i}),$$

donde la última igualdad puede obtenerse del mismo modo en que se probó (4.8) en la demostración del teorema anterior.

Por último, para probar unicidad basta con reproducir, utilizando de nuevo la inducción sobre el número de arcos en (N, d), la parte correspondiente de la demostración del Teorema 4.1 (aplicando, como es obvio, contribuciones equilibradas en lugar de equidad) y, por tanto, se omite aquí la demostración. $\square$

4.5. Observaciones finales

1. Estabilidad: Se trataba esencialmente en este capítulo de definir una extensión del valor de Myerson para lo que hemos llamado situaciones de comunicación dirigidas y caracterizarlo axiomáticamente utilizando las propiedades de eficiencia en componentes, equidad y contribuciones equilibradas, como hizo Myerson para su valor en el caso de las situaciones de comunicación clásicas. Pero Myerson (1977) también probó que, si el juego subyacente en la situación de comunicación era superaditivo, el valor por él definido satisfacía estabilidad. Nos ha parecido interesante estudiar si la propiedad de estabilidad se conserva en este contexto más general.

La estabilidad de una regla de reparto para situaciones de comunicación clásicas significa que eliminar una arista entre dos jugadores no debe incrementar el pago a ninguno de ellos. Si hay estabilidad, ningún jugador estaría interesado en desconectarse de ningún otro con el que estuviera unido por una arista. O, en otros términos, estaría interesado en mantener cada uno de los acuerdos bilaterales cooperativos que hubiera alcanzado con otros jugadores. Podemos generalizar esta noción al caso de las situaciones de comunicación dirigidas, sustituyendo simplemente arista por arco en la definición de Myerson.

Definición 4.7 *Una regla de reparto Ψ definida en una cierta clase $\mathcal{DCS} \subset \mathcal{DCS}^{\infty}$ de situaciones de comunicación dirigidas diremos que es estable si, para toda $(N, v, d) \in \mathcal{DCS}$ y para todo arco $(i, j) \in d$, se cumple que:*

$$\Psi_k(N, v, d) \geq \Psi_k(N, v, d \setminus \{(i, j)\}), \quad para \quad k = i, j.$$

Como se expuso en los preliminares, Myerson (1977) probó que un condición suficiente para que la regla de reparto por él definida para situaciones de comunicación clásicas fuera estable era la superaditividad del juego subyacente en la situación de comunicación. El siguiente ejemplo nos muestra que no es ese el caso en el contexto de las situaciones de comunicación dirigidas.

Ejemplo 4.5 *Consideremos la situación de comunicación dirigida* $(N, \hat{v}, d)$*, donde* $N = \{1, 2, \ldots, 12\}$,

$$v = \sum_{S \subset N,\ s \geq 2} (-1)^s \ 2^{s-2} u_S, \qquad \hat{v} = \sum_{S \subset N,\ s \geq 2,\ T \in \pi(S)} (-1)^s \ 2^{s-2} w_T$$

y el digrafo (N, d) *viene dado por:*

$$d = \{(1,2),(1,8),(1,9),(1,10),(1,11),(1,12),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7)\},$$

como se representa en la Fig. 4.3.

Figura 4.3: Digrafo en los Ejemplos 4.5 y 4.6

A pesar de que no sea en absoluto obvio cómo definir la superaditividad para juegos generalizados, cualquier definición razonable debería extender la que se aplica a los juegos TU clásicos. Puesto que el juego generalizado $\hat{v}$ *es el transformado de* v*, que es un juego superaditivo en* G^N*, deberemos entender que* $\hat{v}$ *ha de ser a su vez superaditivo en* $\mathcal{G}^N$*, aunque no hayamos dado una definición precisa de cuándo un juego generalizado arbitrario es superaditivo.*

Tenemos que, para todos $i, j \in N$*, con* $i \neq j$*:*

$$w^d_{(i,j)} = \begin{cases} \frac{1}{2!}u_{\{i,j\}}, & si\ (i,j) \in d, \\ \frac{1}{2!}u_{\{1,2,j\}}, & si\ \ i=1\ y\ j \in \{3,\ldots,7\}, \quad ó\ si\ \ i=2\ y\ j \in \{8,\ldots,12\}, \\ 0, & en\ \ otro\ \ caso, \end{cases}$$

$$w^d_{(i,j,k)} = \begin{cases} \frac{1}{3!}u_{\{i,j,k\}}, & si\ \ i=1\ y\ j=2, \quad ó\ si\ \ i=2\ y\ j=1, \\ 0, & en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$$

y, para $T \in \pi(S)$ *con* $S \subset N$, *y* $4 \leq s \leq 12$, *es* $w^d_T = \boldsymbol{0}$.

Por tanto, y utilizando la aditividad del valor de Myerson para situaciones de comunicación dirigidas:

$$\mu_1(N,\hat{v},d) = \left(7 \cdot \frac{1}{2}\ +\ 10 \cdot \frac{1}{3}\right)\ \frac{1}{2!}\ +\ (-2) \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{43}{36},$$

$$y \quad \mu_2(N,\hat{v},d) = \mu_1(N,\hat{v},d),\ por\ simetría.$$

Consideremos ahora la situación de comunicación dirigida $(N,\hat{v},d \setminus \{(1,2)\})$.

Como se deduce de los cálculos previos, en el caso de los jugadores 1 *y* 2, *su valor de Myerson para digrafos en esta situación de comunicación dirigida depende sólo del número de coaliciones ordenadas de cardinal* 2 *ó* 3 *y factibles en el digrafo a las que pertenezca cada uno de ellos, y de los coeficientes de unanimidad en el juego. Resulta entonces:*

$$\mu_1(N,\hat{v},d \setminus \{(1,2)\})) = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\ +\ 5 \cdot \frac{1}{3}\right)\ \frac{1}{2!}\ +\ (-2) \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{64}{36}.$$

Y así, si se elimina el arco $(1,2)$, *el pago al jugador* 1 *crece, a pesar de ser* $\hat{v}$ *un juego superaditivo.*

Por tanto, en el caso de las situaciones de comunicación dirigidas, y a diferencia de lo que ocurre en el caso clásico estudiado por Myerson, la superaditividad del juego subyacente no es suficiente para garantizar la estabilidad de la regla de reparto definida.

Sin embargo, es fácil ver que, si el juego (generalizado) subyacente es casi-positivo [7],

[7]Extendiendo a $\mathcal{G}^N$ de la forma natural la noción de juego casi-positivo para los juegos TU clásicos en G^N, diremos que un juego generalizado $v \in \mathcal{G}^N$ es casi-positivo si todos sus coeficientes de unanimidad son no negativos, es decir, si para todo $T \in \Omega(N) \setminus \{\emptyset\}$ es $\Delta^*_v(T) \geq 0$.

entonces el valor de Myerson para digrafos es estable (recordemos que, en G^N, todo juego casi-positivo era superaditivo e, incluso, convexo).

2. Herencia de propiedades: Consideramos de interés, en general, y por motivos que ya se expusieron en capítulos anteriores, el estudio de la herencia de propiedades (del juego original al juego restringido al digrafo). Pero, como se puso de manifiesto en la observación anterior, no es obvio cómo definir propiedades como la superaditividad o la convexidad en el caso de los juegos generalizados. Y lo mismo puede decirse si pensamos en diferentes conceptos de solución, como el core, por ejemplo. En esta situación resulta difícil analizar la herencia de propiedades.

A pesar de ello, es posible detectar alguna patología. Pensemos por ejemplo en la superaditividad. Utilizando de nuevo la situación de comunicación del Ejemplo 4.5, no es difícil probar que la superaditividad, en general, no se hereda por el juego restringido al digrafo.

Ejemplo 4.6 *Sea $(N, \hat{v}, d)$ como se definió en el Ejemplo 4.5. Ya se argumentó allí que el juego generalizado $(N, \hat{v})$ debe considerarse superaditivo. Sean ahora A y $B \subset N$, con $A = \{1, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Resulta:*

$$\hat{v}^d(A) = \frac{\Delta^*_{\hat{v}}(1,8) + \Delta^*_{\hat{v}}(1,9) + \Delta^*_{\hat{v}}(1,10) + \Delta^*_{\hat{v}}(1,11) + \Delta^*_{\hat{v}}(1,12)}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\hat{v}^d(B) = \frac{\Delta^*_{\hat{v}}(2,3) + \Delta^*_{\hat{v}}(2,4) + \Delta^*_{\hat{v}}(2,5) + \Delta^*_{\hat{v}}(2,6) + \Delta^*_{\hat{v}}(2,7)}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\hat{v}^d(A \cup B) = \hat{v}^d(A) + \hat{v}^d(B) + \sum_{j=3}^{7} \frac{\Delta^*_{\hat{v}}(1,j)}{2!} + \sum_{j=8}^{12} \frac{\Delta^*_{\hat{v}}(2,j)}{2!} +$$

$$+ \frac{\Delta^*_{\hat{v}}(1,2) + \Delta^*_{\hat{v}}(2,1)}{2!} + \sum_{k=3}^{12} \frac{\Delta^*_{\hat{v}}(1,2,k) + \Delta^*_{\hat{v}}(2,1,k)}{3!} =$$

$$= \hat{v}^d(A) + \hat{v}^d(B) + 5 \cdot \frac{1}{2!} + 5 \cdot \frac{1}{2!} + 2 \cdot \frac{1}{2!} + (-2) \cdot 20 \cdot \frac{1}{3!} =$$

$$= \hat{v}^d(A) + \hat{v}^d(B) - \frac{2}{3} < \hat{v}^d(A) + \hat{v}^d(B),$$

y, por tanto, el juego restringido al digrafo, $\hat{v}^d$, no es superaditivo.

3. Caracterizaciones alternativas: Se encuentran en la literatura caracterizaciones del valor de Myerson que hacen uso de propiedades distintas de las aquí mencionadas, como pueden ser la del jugador superfluo u otras. Consideramos que podría ser de interés analizar el sentido y utilidad de estas propiedades en el contexto más amplio de las situaciones de comunicación dirigidas y explorar si se mantienen las correspondientes caracterizaciones.

4. Métodos de cálculo: Consideramos de interés explorar la medida en que puedan extenderse al caso de las situaciones de comunicación dirigidas determinados métodos de cálculo para el valor de Myerson, del tipo de los descritos en las secciones 2.2 y 2.3 de esta memoria para el caso de las situaciones de comunicación estándar.

5. El entorno probabilístico: Los resultados previos podrían extenderse a un entorno probabilístico como se ha hecho en el capítulo anterior de esta memoria para el caso de las situaciones de comunicación no dirigidas.

6. Centralidad: El valor de Myerson para digrafos introducido en este capítulo podría utilizarse en principio para definir una familia de medidas de centralidad para actores o nodos en una red social dirigida, en la que la red de comunicaciones se represente por un grafo dirigido, y los intereses económicos de los jugadores, por un juego generalizado. Las medidas así obtenidas generalizarían las definidas en Gómez et al. (2003), para redes sociales estándar.

Capítulo 5

Futuras líneas de investigación

Además de las ya mencionadas al final de cada uno de los dos capítulos precedentes, y al final de algunas de las secciones, en el caso del Cap. 2, ciertas cuestiones relacionadas con las expuestas en esta memoria han despertado nuestra curiosidad primero, y luego nuestro interés, a lo largo de estos últimos años y, previsiblemente, a ellas dediquemos nuestros esfuerzos en los próximos. Enumeraremos algunas a continuación.

1. Centralidad.

En relación con la medida de la centralidad de los actores en redes sociales propuesta en Gómez et al. (2003), nos hemos planteado diversas extensiones potenciales. Entre ellas:

- Medidas de centralidad en redes sociales con grafos no dirigidos.

  - Basadas en el valor posicional, en lugar de en el de Myerson.

  - En redes con pesos en los nodos y/o en las aristas.

  - De grupos o clases (no necesariamente de actores individuales).

- Medidas de centralidad en redes sociales con grafos dirigidos.

  - Que satisfagan equidad, según el modelo que se propone en el Capítulo 4 de esta memoria.

- Que satisfagan lo que llamaremos α-equidad dirigida, haciendo uso de una concepción de la conectividad en grafos dirigidos distinta de la presentada en el modelo del Capítulo 4.

2. Generalizaciones y reglas de reparto alternativas

En los dos capítulos inmediatamente anteriores de esta memoria se han presentado sendas generalizaciones del modelo de Myerson, suponiendo primero que el grafo de comunicaciones, en lugar de determinista, fuera aleatorio (en el Cap. 3) y, luego, que fuera un grafo dirigido (en el Cap. 4, en el que, además, sustituíamos el juego TU clásico del modelo de Myerson por uno generalizado). Pero, entre las reglas de reparto para situaciones de comunicación que aparecen en la literatura se encuentran, además del valor de Myerson, el valor posicional, del que se ha dicho algo en los preliminares y en el Cap. 2, y el valor de Hamiache (1999). Consideramos que sería interesante extender estos valores tanto a las situaciones de comunicación probabilísticas generalizadas como a las situaciones de comunicación dirigidas, como hemos hecho con el valor de Myerson.

3. Juegos generalizados

En el Capítulo 4 de esta memoria, para definir las situaciones de comunicación dirigidas, se han introducido los juegos en forma de función característica generalizada. Nowak y Radzik (1994) definieron inicialmente un valor para estos juegos, $\Psi^{N/R}$, que generaliza el valor de Shapley para los juegos TU clásicos. Más tarde, Sánchez y Bergantiños (1997) propusieron otro valor, $\Psi^{S/B}$, que extiende también el valor de Shapley, y que difiere del primero en los axiomas de simetría y del jugador nulo. Puesto que ambos valores son lineales, basta para definirlos con dar su expresión para los juegos w_T de la base de unanimidad generalizada. Así, para toda coalición ordenada y no vacía $T = (i_1, i_2, \ldots, i_t) \in \Omega(N)$, se definen:

$$\Psi_j^{N/R}(N, w_T) = \begin{cases} \frac{1}{t!}, & \text{si } j = i_t, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \text{y} \quad \Psi_j^{S/B}(N, w_T) = \begin{cases} \frac{1}{t!}\,\frac{1}{t}, & \text{si } j \in H(T), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En resumen, existen en la literatura dos reglas de reparto definidas en $\mathcal{G}^N$. Ambas generalizan el valor de Shapley, pero son claramente distintas. Parece natural preguntarse si serán las únicas con "buenas" propiedades. Nos hemos propuesto definir una familia paramétrica de reglas de reparto en $\mathcal{G}^N$, que conserve ciertas propiedades comunes a las dos anteriores, y que las contenga como casos particulares.

El estado actual de nuestros trabajos sobre este punto, que se desarrollan en colaboración con el profesor van den Brink, se recoge en:

- van den Brink, R., Gómez, D., González-Arangüena, E. y Manuel, C. (2008): Order monotonic solutions for generalized characteristic functions. (working paper) MIMEO.

Por otra parte, pero en relación con lo anterior, cuando en el modelo de las situaciones de comunicación dirigidas se restringe la formación de coaliciones en un juego por medio de un digrafo, se está introduciendo una asimetría entre los dos nodos incidentes en un determinado arco: el iniciador y el finalizador, o el emisor y el receptor, si se prefiere. En este contexto, la equidad (que sí satisface el valor que, para las situaciones de comunicación dirigidas, se propone en esta memoria) podria resultar discutible como propiedad. Utilizando la familia paramétrica de reglas de reparto en $\mathcal{G}^N$ antes aludida, nos proponemos definir una familia de reglas de asignación para situaciones de comunicación dirigidas que satisfagan una propiedad que tenga en cuenta la asimetría citada, y que llamamos provisionalmente α-equidad dirigida. El trabajo al respecto se está desarrollando también en colaboración con el profesor van den Brink.

Bibliografía

Amer, R., Giménez, J.M. y Magaña, A. (2007): Accessibility in oriented networks. *European Journal of Operational Research* **180**, 700-712.

Aumann, R.J. y Dreze, J.H. (1974): Cooperative Games with Coalition Structures. *Int. J. Game Theory* **3**(4), 217-237.

Aumann, R.J. y Maschler, M. (1964): The Bargaining Set for Cooperative Games. En Dresher, M., Shapley, L.S. y Tucker, W. (eds.) *Advances in Game Theory. Annals of Mathematics Studies* **52**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 443-476.

Aumann, R.J. y Myerson, R.B. (1988): Endogenous Formation of Links between Players and of Coalitions: An Application of the Shapley Value. En Roth, A. E. (ed.) *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley.* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 175-191.

Banzhaf, J. (1965): Weighted voting doesn'work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review* **19**, 317-343.

Bilbao, J.M., Jimenez, N. y López, J.J. (2006): A note on a value with incomplete information. *Games and Economic Behavior* **54**, 419-429.

Bondareva, O. (1963): Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games (En Ruso). *Problemy Kibernetiki* **10**, 119-139.

Borm, P., Owen, G. y Tijs, S. (1992): On the Position value for communication situations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **5**, 305-320.

Calvo, E., Lasaga, J. y van den Nouweland, A. (1999): Values of games with probabilistic graphs. *Mathematical Social Sciences* **37**, 79-95.

Casajús, A. (2007): The position value is the Myerson value, in a sense. *Int. J. Game Theory* **36**, 47-55.

Chun, Y. (1989): A new axiomatization of the Shapley value. *Games and Economic Behavior* **1**, 119-130.

Demange, G. (1994): Intermediate preferences and stable coalition structures. *Journal of Mathematical Economics* **23**, 45-58.

Demange, G. y Wooders, M. (2005): *Group formation in economics: networks, clubs and coalitions*. Cambridge University Press.

Dubey, P. (1975): On the uniqueness of the Shapley value. *Int. J. Game Theory* **4**, 131-139.

Erdös, P. y Renyi, A. (1959): On random graphs. *Public. Math. Debrecen* **6**, 290-297.

Fernández, J.R., Algaba, E., Bilbao, J.M., Jiménez, A., Jiménez, N. y López, J.J. (2002): Generating functions for computing the Myerson value. *Annals of Operations Research* **109**, 143-158.

Freeman, L. (2006): *The Development of Social Network Analysis*. Empirical Press, Vancouver.

Gilles, R.P. y Owen, G. (1999): Cooperative Games and Disjunctive Permission Structures. CentER Discussion Paper 9920, Center for Economic Research, Tilburg University, Tilburg, the Netherlands.

Gilles, R.P., Owen, G. y van den Brink, R. (1992): Games with permission structures: The conjunctive approach. *Int. J. Game Theory* **20**, 277-293.

Gillies, D.B. (1953): Some Theorems on N-Person Games, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Princeton University.

Gillies, D.B. (1959): Solutions to general non-zero-sum games. En Tucker, A.W. y Luce, D.R. (eds.) Contributions to the Theory of Games, Vol. IV (*Annals of Mathematics Studies* **40**). Princeton University Press, Princeton, NJ , 47-85.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Tejada, J. (2003): Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences* **46**, 27-54.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Tejada, J. (2004a): Splitting graphs when calculating Myerson value for pure overhead games. *Mathematical Methods of Operations Research* **59**, 479-489.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G. y del Pozo, M. (2004b): A unified approach to the Myerson value and the position value. *Theory and Decision* **56**, 63-76.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Saboyá, M. (2008a): The cohesiveness of subgroups in social network: A view from game theory. *Annals of Operation Research* **158**, 33-46.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C. y Owen, G. (2008b): A value for probabilistic communication situations. *European Journal of Operational Research* **190**, 539-556.

González-Arangüena, E., Manuel, C., Gómez, D. y van den Brink, R. (2008): A Value for Directed Communication Situations, Tinbergen Institute Discussion Papers 08-006/1, Tinbergen Institute, y Cuadernos de trabajo, Escuela Universitaria de Estadística UCM, número 01/2008.

Greenberg, J. (1994): Coalition structures. Capítulo 37 en Aumann, R.J. y Hart, S. (eds.) *Handbook of Game Theory, Vol. 2*, North Holland. Amsterdam, the Netherlands, 1305-1337.

Grofman, B. y Owen, G. (1982): A game theoretic approach to measuring centrality in social networks. *Social Networks* **4**, 213-224.

Hamiache, G. (1999): A value with incomplete communication. *Games and Economic Behavior* **26**, 59-78.

Hamiache, G. (2001): Associated consistency and the Shapley value. *Int. J. Game Theory* **30**, 279-289.

Harsanyi, J.C. (1985): The Shapley Value and the Risk Dominance Solution of Two Bargaining Models for Characteristic-Function Games. En Aumann, R.J. et al. (eds.) *Essays in Game Theory and Mathematical Economics*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 43-68.

Hart, S. y Kurz, M. (1983): Endogenous formation of coalitions. *Econometrica* **51**, 1047-1064.

Hart, S. y Mas-Colell, A. (1989): Potential, value and consistency. *Econometrica* **57**, 589-614.

Jackson, O. (2005a): Allocation rules for network games. *Games and Economic Behavior* **51**, 128-154.

Jackson, O. (2005b): A Survey of Networks Formation Models: Stability and Efficiency. En Demange, G. y Wooders, M. (eds.) *Group Formation in Economics. Networks, Clubs and Coalitions*. Cambridge University Press, 11-57.

Kalai, E. (2008): Presidential address. *Games and Economic Behavior* **63**, 421-430.

Kalai, E. y Samet, D. (1988): Weighted Shapley Values. En Roth, A. (ed.) *The Shapley Value*. Cambridge University Press, New York, 83-99.

Kim, J-Y. y Jun, T. (2008): Connectivity and Allocation Rule in a Directed Network. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*; Vol. **8**: Iss. 1 (Contributions), Article 19.

Kongo, T., Funaki, Y. y Tijs, S. (2007): New axiomatization and implementation of the Shapley value. CentER Discussion Paper 2007-90.

Kosfeld, M. (2004): Economic Networks in the Laboratory: A Survey. *Review of Network Economics*, Concept Economics, **3(1)**, 19-41.

Mason, O. y Verwoerd, M. (2007): Graph theory and networks in Biology. *IET Syst. Biol.* **1** (2), 89-119.

Meessen, R. (1988): Communication games (En Neerlandés). Master's thesis, Department of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands.

Moretti, S. y Patrone, F. (2008): Transversality of the Shapley value. *TOP* **16**, 1-41.

Myerson, R.B. (1977): Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research* **2**, 225-229.

Myerson, R.B. (1980): Conference Structures and fair allocation rules. *Int. J. Game Theory* **9**, 169-182.

Newman, M.E.J. (2003): The Structure and Function of Complex Networks. *SIAM Review* **2**, 167-256.

Neyman, A. (1989): Uniqueness of the Shapley Value. *Games and Economic Behavior* **1**, 116-118.

Nowak, A.S. y Radzik, T. (1994): The Shapley value for n-person games in generalized characteristic function form. *Games and Economic Behavior* **6**, 150-161.

Nowak, M.A. y May, R.M. (1992): Evolutionary Games and Spatial Chaos, *Nature* **359**, 826-829.

Owen, G. (1977): Values of games with a priori unions. En Hein, R. y Moeschlin, O. (eds.) *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*. Springer-Verlag, New York, 76-88.

Owen, G. (1986): Values of graph-restricted games. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **7**, 210-220.

Sánchez, E. y Bergantiños, G. (1997): On values for generalized characteristic functions. *OR Spectrum* **19**, 229-234.

Sánchez, E. y Bergantiños, G. (1999): Coalitional values and generalized characteristic functions. *Mathematical Methods of Operations Research* **49**, 413-433.

Sánchez, E. y Bergantiños, G. (2001): Weighted Shapley values for games in generalized characteristic function form. *Top* **9**, 55-67.

Shapley, L.S. (1952): Notes on the N-Person Game III: Some Variants of the von Neumann-Morgenstern Definition of Solution. Rand Corporation research memorandum RM- 817.

Shapley, L.S. (1953): A value for n-person games. En Kuhn, H.W. y Tucker, A.W. (eds.) *Annals of Mathematics Studies* **28**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 307-317.

Shapley, L.S. (1962): Simple games: an outline of the descriptive theory. *Behavioral Science* **7**, 59-66.

Shapley, L.S. (1967): On Balanced Sets and Cores. *Naval Research Logistics Quarterly* **14**, 453-460.

Shapley, L.S. (1971): Cores of convex games. *Int. J. Game Theory* **1**, 11-26.

Shapley, L.S. y Shubik, M. (1954): A method for evaluating the distribution of power in a commitee system. *Am. Politic. Sci. Rev.* **48**, 787-792.

Slikker, M. (2000): Inheritance of properties in communication situations. *Int. J. Game Theory* **29**, 241-268.

Slikker, M. (2005): A characterization of the position value. *Int. J. Game Theory* **33**, 505-514.

Slikker, M. y van den Nouweland, A. (2001): *Social and economic networks in cooperative game theory.* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Slikker, M., Gilles, R., Norde, H. y Tijs, S. (2005): Directed networks, allocation properties and hierarchy formation, *Mathematical Social Sciences* **49**(1), 55-80.

Solomonoff, R. y Rapoport, A. (1951): Connectivity of random nets. *Bull. Math. Biophys.* **13**, 107-117.

Tutte, W.T. (2001): *Graph Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

van den Brink, R. (1997): An axiomatization of the disjunctive permission value for games with a permission structure. *Int. J. Game Theory* **26**, 27-43.

van den Brink, R. (2001): An axiomatization of the Shapley value using a fairness property. *Int. J. Game Theory* **30**, 309-319.

van den Brink, R. y Gilles, R.P. (1996): Axiomatizations of the conjunctive permission value for games with permission structures. *Games and Economic Behavior* **12**, 113-126.

van den Brink, R., Gómez, D., González-Arangüena, E. y Manuel, C. (2008): Order monotonic solutions for generalized characteristic functions. (working paper) MIMEO.

van den Nouweland, A. (1993): Games and Graphs in Economic Situations. Ph.D. thesis, Tilburg University, Tilburg, the Netherlands.

van den Nouweland, A. (2005): Models of Networks Formation in Cooperative Games. En Demange, G. y Wooders, M. (eds.) *Group Formation in Economics. Networks, Clubs and Coalitions*. Cambridge University Press, 58-88.

van den Nouweland, A. y Borm, P. (1991): On the convexity of communication games. *Int. J. Game Theory* **19**, 421-430.

Wasserman, S. y Faust, K. (1994): *Social Networks Analysis: Methods and Applications.* Cambridge University Press, Cambridge.

Weber, R.J. (1994): Games in coalitional form. Capítulo 36 en Aumann, R.J. y Hart, S. (eds.) *Handbook of Game Theory, Vol. 2,* North Holland. Amsterdam, the Netherlands, 1285-1303.

Winter, E. (2002): The Shapley value. Capítulo 53 en Aumann, R.J. y Hart, S. (eds.) *Handbook of Game Theory, Vol. 3*, North Holland. Amsterdam, the Netherlands, 225-254.

Yellen, J. (2004): Basic Digraph Models and Properties. En Gross, J. y Yellen, J. (eds.) *Handbook of Graph Theory*, CRC Press. New York, 127-141.

Young, H.P. (1985): Monotonic solutions of Cooperative Games. *Int. J. Game Theory* **14**, 65-72.